統計研究彙報　第76号　2019年３月　（51-70）

扶養パタン分析による市町村民税非課税世帯率の計算

福留　孝彦 *

Calculation of Inhabitant Tax-Exempt Households Rate by Support-Depend Pattern Analysis

FUKUTOME Takahiko

日本の社会保障の多くの施策において、「低所得世帯」の基準として「市町村民税非課税世帯」が採用されている。しかしながら、住民税の世帯課税状況に関する統計が存在せず、「市町村民税非課税世帯」の概念そのものは明確であるにもかかわらず、その量的把握が困難な状況にある。本論文では、まず整数分解のパタンが世帯構成員相互の扶養・被扶養のパタンと１対１に対応することに着目して世帯を分類し、この分類された世帯の全世帯に占める割合及びその非課税世帯率を、個人単位の課税データと住民基本台帳及び国勢調査の人口・世帯データを用いて計算することができることを示す。この新たな手法により、従来は標本調査の結果から推計せざるを得なかった市町村民税非課税世帯に関する諸量を、既存の公的悉皆調査の統計を用いてより高い信頼性で算出することが可能となる。論文の後半では、全国値を例として具体的な計算手順及び結果を示す。

キーワード: 貧困、低所得世帯、市町村民税非課税世帯、住民基本台帳、国勢調査、整数の分解

In the social security policies in Japan, “low-income families” is often defined as “inhabitant tax-exempt households”. The definition of “inhabitant tax-exempt households” is clear enough, however, the amount of them is hard to grasp and remains unclear because of absence of their statistics. In this paper, we focus on the one-to-one correspondence between integer partition patterns and support-depend relations among household members, and classify all the households into the basic categories. Then we demonstrate that both of the percentage of households in each category and the inhabitant tax-exempt households rate of each one can be calculated by utilizing result data of individual taxation statistics and population-household data of Basic Resident Register and the National Census. Our new method, along with existing complete enumeration official statistics data, yields quantitative figures concerning inhabitant tax-exempt households with higher reliability, which have been only obtained by estimation from sampling survey. The latter part of the paper is devoted to the procedure of National values calculation and the results as a practical example.

Key words: poverty, low-income families, inhabitant tax-exempt households, Basic Resident Register, National Census, Integer Partition

＊ 元高知県社会福祉協議会事務局、Email : take1hiko@mailaps.org

1. はじめに

日本の社会保障の多くの施策において、「低所得世帯」の基準として「市町村民税非課税世帯」が採用されており、市町村民税の世帯課税状況に関する全国値は国の低所得者対策の施策立案の基礎データとして、また各都道府県値は当該施策の実施にあたっての国庫補助等の配分指標として実際的な意義を有するなど、社会保障政策上その量的把握は極めて重要である。

「市町村民税非課税世帯」とは、世帯構成員の全員が市町村民税の均等割も所得割も非課税である世帯として定義されるが、市町村民税はそもそも世帯単位でなく個人単位に課税されており、市町村民税課税統計に世帯に関するデータは存在しない。したがって世帯単位の課税・非課税の状況は、個人を対象とする市町村民税課税データと、世帯情報を有する住民基本台帳データとのマッチングを経て初めて得られることになるが、現時点においてそのような統計処理は実施されておらず、公的統計として入手することができない。

このように、「市町村民税非課税世帯」については、社会保障政策立案上これを把握することが必須であるにもかかわらず、その量的把握が困難な状況にあり、既存の統計データを用いて比較的簡単な計算により実用に耐え得る精度で推計するための処方箋が望まれる所以である[1)]。

市町村民税非課税世帯の量的把握については、田中（2013）が行った市町村民税課税データと全国消費実態調査及び国民生活基礎調査による研究や、江口・川上（2009）による特定の市における調査結果があるが、本論文では標本調査の結果を用いることなく、全数調査である個人単位の市町村民税課税データと、住民基本台帳及び国勢調査の人口・世帯データから、組合せ論的な数え上げの手法を用いて市町村民税の非課税世帯率及び非課税世帯住民率を求める方法を定式化するとともに、これを適用して具体的にこれらの全国値を推計する。

本論文の構成は以下のとおりである。

第 **2.** 節では、本論文で用いる集合に関する記号を定義する。第 **3.** 節では、個人に対する課税情報を世帯の課税情報に結びつけるために必要となる世帯内の扶養・被扶養のパタンが整数の分解の仕方と 1 対 1 に対応することを利用して、計算の対象となる扶養パタンを漏れなくリストアップすることができることを示すとともに、全世帯の非課税率は、4 つの因子 $\omega, \phi, \psi, \gamma^*$ の積をこの扶養パタンごとに求め、これらの和を取ることにより計算できることを示す。第 **4.** 節では、4 つの因子の計算式を順に求める。このうち、近似的な暫定データとして国勢調査から取得する世帯人員別世帯割合 $\omega(n)$ 及び組合せ論的な数え上げの手法により計算した (n, d) 世帯の暫定分布 $\phi(n, d)$ については、基礎データの全住民数、世帯数、可所得住民数、被扶養者数と整合するように補正計算を行う。第 **5.** 節では、前節までに行った定式化に基づき具体的な計算を行うための基礎データの取得及び必要な加工について述べ、第 **6.** 節で全国値の計算結果を示す。第 **7.** 節でまとめと今後の課題について述べる。

なお、次節以降では「市町村民税非課税」を省略して単に「非課税」という。

2. 定義等

集合に関して本論文で用いる演算記号等の意味を示すとともに、参照の便のために、主な集合の定義一覧及び引用する統計調査の本論文における略称を予め示しておこう。

---

1) 平成 24 年 5 月 28 日に開催された第 1 回「社会保障制度の低所得者対策の在り方に関する研究会（厚生労働省主催）」で提示された関連資料において、平成 22 年現在における「住民税世帯非課税となっている対象者は、約 3100 万人程度と推計される。」（関連資料 p.27）との記述があり、その推計方法を確認したところ、住民基本台帳に基づく人口と課税状況調べの納税義務者及び扶養親族等人員を直接に用いたものであった。この方法の評価と、本論文の結果の活用により同じデータを用いて簡便に非課税世帯住民数の概数を算出する方法については第 **6.2** 節において論じる。

2.1　集合に関する演算記号等

記号	意味	記号	意味
$\|A\|$	集合 A の要素の数	$A-B$	$\{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$
		$A+B$	$A \cap B = \emptyset$ のときの $A \cup B$

2.2　各集合の定義

	記号	意味	記号	意味
住民集合	R	全住民	H	世帯主
	S	世帯主の配偶者	S_1	世帯主の配偶者（控除対象外）
	D	被扶養者等	S_2	世帯主の配偶者（控除対象）
	L_j	j 人を扶養する可所得住民	G_j	j 人を扶養する納税義務者
世帯集合	Ω	全世帯	Ω^*	非課税世帯
	Ω_n	n 人世帯	Ω^*_n	非課税 n 人世帯
	$\Omega_{n,d}$	(n,d) 世帯	$\Omega^*_{n,d}$	非課税 (n,d) 世帯
	$\Omega_{n,d,q}$	(n,d,q) 世帯	$\Omega^*_{n,d,q}$	非課税 (n,d,q) 世帯
世帯住民集合	R（再掲）	全住民	R^*	非課税世帯住民
	R_n	n 人世帯住民	R^*_n	非課税 n 人世帯住民

注 1)　可所得住民とは他の親族等に扶養されていない（課税の対象となりうる）住民であり、納税義務者とは可所得住民のうち、課税され納税義務を負う（課税の対象となった）住民のことである。

注 2)　(n,d) 世帯とは、世帯人員 n 人のうち被扶養者等（控除対象配偶者を含む。以下同じ。）が d 人である世帯を意味する。

注 3)　(n,d,q) 世帯とは、(n,d) 世帯の可所得者 $n-d$ 人が被扶養者等 d 人をどのように分担して扶養しているかという観点で類別された扶養パタンの最小単位となる世帯を意味する（第 **3.1** 節で詳述）。

注 4)　R^*, R^*_n は「非課税住民」ではなく、「非課税世帯（に属する）住民」であることに留意する。

注 5)　集合 A の要素の数の推計値を、ハット記号を用いて $|\hat{A}|$ で表す（次注の $|\tilde{A}|$ と混同しないよう留意する。）

注 6)　集合 A について組合せの場合の数を考えるとき、その仮想的な集合の要素の数を $|\tilde{A}|$ で表す。$|\tilde{A}|$ は $|A|$ の推計値ではないことに留意する。比率 $|A|/|B|$ を推計するとき、場合の数 $|\tilde{A}|, |\tilde{B}|$ を考え $|A|/|B|$ の推計値を $|\tilde{A}|/|\tilde{B}|$ とするが、$|\tilde{A}|$ が $|A|$ の推計値であるわけではない。

2.3　関係統計

名称	本論文での略称
住民基本台帳に基づく人口、人口動態及び世帯数に関する調査	住基台帳人口調査
市町村税の課税状況等の調べ	課税状況調べ
国勢調査	国勢調査

3. 世帯非課税の一般論

市町村民税の課税単位は世帯でなく個人である。したがって課税状況調べには世帯や世帯主に対する課税状況の情報はないが、扶養人数ごとの納税義務者数が報告されており、これが個人に関する課税状況と世帯に関する課税状況を関係づける重要な情報となる。

本節では、個人に対する課税情報を世帯の課税情報に結びつけるために、世帯を構成する可所得住民と被扶養者等の間の扶養・被扶養関係を分類し、この分類された世帯ごとの非課税率を用いて非課税世帯率 ω^* 及び非課税世帯住民率 ρ^* の一般的表式を導出する。

3.1 整数の分割と世帯の扶養パタン

(n,d) 世帯の可所得住民それぞれの課税率はその扶養親族の数により異なることから、可所得住民 $n-d$ 人が被扶養者 d 人をどのように分担して扶養しているかが問題となる。いま世帯内の可所得住民を

$$l \equiv n-d, \tag{3.1}$$

と置き、世帯内の被扶養者等 d 人のうち $j\ (0 \le j \le d)$ 人を扶養する可所得住民の人数を $l_j\ (\ge 0)$ 人とするとき、世帯内の扶養人数別可所得住民数の組 $(l_0, l_1, \cdots, l_d)$ を n 人世帯の扶養パタンと呼ぼう。このとき

$$l = l_0 + l_1 + \cdots + l_d\,,$$

$$d = 0 \cdot l_0 + 1 \cdot l_1 + \cdots + d \cdot l_d\,,$$

が成り立つ。この２つの式を加え、(3.1) の式（世帯内の可所得住民と被扶養者等の合計が世帯人数になること）を考慮すると

$$n = 1 \cdot l_0 + 2 \cdot l_1 + \cdots + (1+d) \cdot l_d\,, \tag{3.2}$$

であるから、n 人世帯の扶養パタンを求めることは、式 (3.2) を満たす非負の整数の組 $(l_0, l_1, \cdots, l_d)$ を探すことに他ならない。

さて、式 (3.2) は

$$n = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{l_0\text{個}}) + (\underbrace{2+2+\cdots+2}_{l_1\text{個}}) + \cdots + \underbrace{(1+d)+(1+d)+\cdots+(1+d)}_{l_d\text{個}},$$

すなわち、正整数 n を $l\ (= l_0 + l_1 + \cdots + l_d)$ 個の正整数（和因子という）に分割する式と見ることができる。

したがって、n 人世帯の扶養パタンは、正整数 n の分割の仕方と 1 対 1 に対応する。例えば $n = 4$（４人世帯）のときの整数分割と世帯扶養パタンの対応は表 1 に示すとおり 5 パタンある。

表 1　整数分割パタンと世帯扶養パタンの対応

n	n の分解	和因子の数 l	$d = n - l$	q	l_0	l_1	l_2	l_3
4	1+1+1+1	4	0	1	4	0	0	0
4	1+1+2	3	1	1	2	1	0	0
4	1+3	2	2	1	1	0	1	0
4	2+2	2	2	2	0	2	0	0
4	4	1	3	1	0	0	0	1

$d = 0,1,3$ のときはそれぞれ 1 通りの分割パタンしかないが、$d = 2$ の場合は、4 を $l = 2$ 個の和因子に分割する仕方が２通りあり、そのそれぞれに異なる扶養パタン $(l_0, l_1, \cdots, l_d)$ が対応して

いることがわかる。この２つのパタンを区別するために、(n,d) 分類の下位に番号 q を付与している。すなわち世帯扶養パタンの最小単位は (n,d,q) の組で表されることになる。

整数 n の分割パタンの数を $p(n)$ で、そのうち和因子の個数が l であるパタンの数を $f(n|l)$ で表す。整数 n の分割パタンは n 人世帯の扶養パタンと 1 対 1 に対応するから、n 人世帯の扶養パタンの数は $p(n)$、そのうち (n,d) 世帯の扶養パタンの数は $f(n|l)$ である[2)]。この $f(n|l)$ 個の扶養パタンそれぞれに相異なる整数 $q\,(1 \le q \le f(n|l))$ を割り当てると、任意の世帯の扶養パタン $(l_0, l_1, \cdots, l_d)$ は整数の組 (n,d,q) で指定できる。整数の組 (n,d,q) についても扶養パタンと呼ぶこととし、この扶養パタンの世帯を (n,d,q) 世帯と呼ぼう。ここで、非負の整数 $m\,(\ge 0)$ に対して

$$P(m) \equiv \begin{cases} p(1)+p(2)+\cdots+p(m) & m \ge 1 \text{ のとき} \\ 0 & m = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義すると、1 人世帯から m 人世帯までを推計対象とするとき、整数の分割パタンすなわち世帯の扶養パタンは全体で $P(m)$ 個ある。

集合 Λ を

$$\Lambda \equiv \{1, 2, \cdots, P(m)\},$$

と定義しておく。

さて、集合 Λ_n を

$$\Lambda_n \equiv \{P(n-1)+1, P(n-1)+2, \cdots, P(n)\},$$

とし、$p(n) = P(n) - P(n-1)$ 個ある整数 n の分割パタンに Λ_n の要素を 1 対 1 に対応させると、1 人世帯から m 人世帯までの任意の世帯の扶養パタンは

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \cdots + \Lambda_m = \{1, 2, \cdots, P(m)\},$$

の要素と 1 対 1 に対応する。このときの、$i \in \Lambda$ を世帯の扶養パタン番号と呼ぶこととする。

扶養パタン (n,d,q) の集合から Λ の上への写像

$$\sigma\colon (n,d,q) \longrightarrow i \in \Lambda_n,$$

を考えれば、これは 1 対 1 写像だから、逆写像

$$\sigma^{-1}\colon i \longrightarrow (n,d,q),$$

が存在する。つまり、(n,d,q) 世帯の n,d,q はパタン番号 $i \in \Lambda$ の関数で

$$n = n(i), \quad d = d(i), \quad q = q(i),$$

と見ることができ

$$\sum_{i\in\Lambda} \rightleftharpoons \sum_{n=1}^{m}\sum_{d=0}^{n-1}\sum_{q=1}^{f(n|l)}, \qquad \sum_{i\in\Lambda_n} \rightleftharpoons \sum_{d=0}^{n-1}\sum_{q=1}^{f(n|l)}, \qquad \sum_{i\in\Lambda_{n,d}} \rightleftharpoons \sum_{q=1}^{f(n|l)},$$

と対応する。ここで

$$\Lambda_{n,d} \equiv \left\{\sigma(n,d,1), \sigma(n,d,2), \cdots, \sigma\big(n,d,f(n|l)\big)\right\},$$

である。

3.2　世帯非課税率

世帯集合 Ω，Ω_n，Ω_n^* の包含関係を図 1 に、住民集合 R，R_n，R_n^* の包含関係を図 2 に示す。

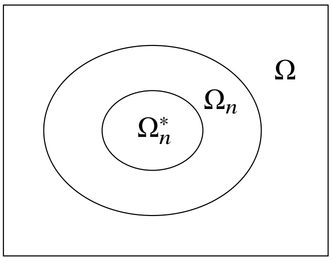
全世帯に対する非課税世帯率を ω^*、全住民に対する非課税世帯住民率を ρ^* とすると

$$\omega^* = \frac{|\Omega^*|}{|\Omega|}, \quad \rho^* = \frac{|R^*|}{|R|}.$$

---

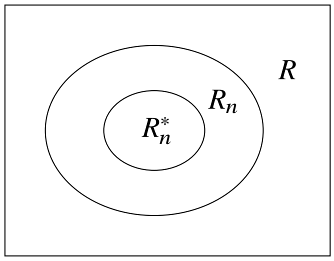
2) $n=1$ から $n=10$ までの整数分割パタン数 $p(n)$ は次のとおりである。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42



Ω 全世帯
Ω_n n 人世帯
Ω_n^* 非課税 n 人世帯

図 1 世帯集合



R 全住民
R_n n 人世帯住民
R_n^* 非課税 n 人世帯住民

図 2 住民集合

$\omega(n)$、$\rho(n)$、$\omega^*(n)$、$\rho^*(n)$ を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \omega(n) &\equiv \frac{|\Omega_n|}{|\Omega|}, \quad \rho(n) \equiv \frac{|R_n|}{|R|}, \\ \omega^*(n) &\equiv \frac{|\Omega_n^*|}{|\Omega|}, \quad \rho^*(n) \equiv \frac{|R_n^*|}{|R|}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

平均世帯人員を $\bar{n}$ で表すことにすると

$$|R| = \bar{n}|\Omega|, \quad |R_n| = n|\Omega_n|, \quad |R_n^*| = n|\Omega_n^*|,$$

だから

$$\rho(n) = \frac{n}{\bar{n}}\,\omega(n), \quad \rho^*(n) = \frac{n}{\bar{n}}\,\omega^*(n)\,. \tag{3.4}$$

式 (3.3), (3.4) より

$$\frac{\omega^*(n)}{\omega(n)} = \frac{|\Omega_n^*|}{|\Omega_n|} = \frac{|R_n^*|}{|R_n|} = \frac{\rho^*(n)}{\rho(n)}\,. \tag{3.5}$$

式 (3.5) の値（n 人世帯の非課税世帯率）を $\tau^*(n)$ とすると、世帯人員 n の最大値を m として

$$\omega^* = \frac{|\Omega^*|}{|\Omega|} = \sum_{n=1}^{m} \frac{|\Omega_n^*|}{|\Omega|} = \sum_{n=1}^{m} \omega^*(n) = \sum_{n=1}^{m} \omega(n)\,\tau^*(n), \tag{3.6}$$

$$\rho^* = \frac{|R^*|}{|R|} = \sum_{n=1}^{m} \frac{|R_n^*|}{|R|} = \sum_{n=1}^{m} \rho^*(n) = \sum_{n=1}^{m} \rho(n)\,\tau^*(n), \tag{3.7}$$

と表される。

$\tau^*(n)$ を (n, d, q) 世帯の非課税率で表そう。

$$|\Omega_n^*| = \sum_{d=0}^{n-1} |\Omega_{n,d}^*| = \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{q=1}^{f(n|l)} |\Omega_{n,d,q}^*|,$$

だから

$$\tau^*(n) = \frac{|\Omega_n^*|}{|\Omega_n|} = \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{q=1}^{f(n|l)} \frac{|\Omega_{n,d,q}^*|}{|\Omega_n|} = \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{q=1}^{f(n|l)} \frac{|\Omega_{n,d}|}{|\Omega_n|} \frac{|\Omega_{n,d,q}|}{|\Omega_{n,d}|} \frac{|\Omega_{n,d,q}^*|}{|\Omega_{n,d,q}|},$$

である。

各項を構成する因子に現れる世帯類型間の包含関係を図 3 に示した。

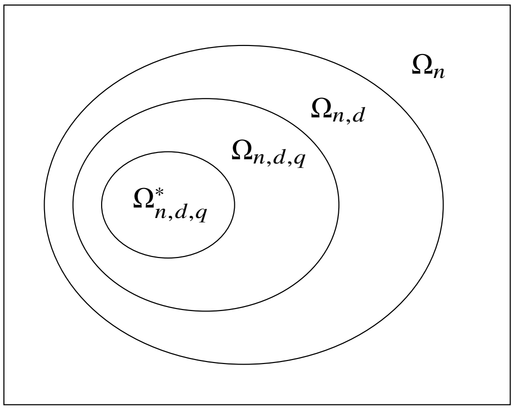
ここで

$$\phi(n,d) \equiv \frac{|\Omega_{n,d}|}{|\Omega_n|}, \quad \psi(n,d,q) \equiv \frac{|\Omega_{n,d,q}|}{|\Omega_{n,d}|}, \quad \gamma^*(n,d,q) \equiv \frac{|\Omega_{n,d,q}^*|}{|\Omega_{n,d,q}|},$$

と定義すると

$$\tau^*(n) = \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{q=1}^{f(n|l)} \phi(n,d)\,\psi(n,d,q)\,\gamma^*(n,d,q) = \sum_{i\,\in\,\Lambda_n} \phi(n,d)\,\psi(n,d,q)\,\gamma^*(n,d,q),$$

である。



Ω_n	n 人世帯
$\Omega_{n,d}$	(n,d) 世帯
$\Omega_{n,d,q}$	(n,d,q) 世帯
$\Omega^*_{n,d,q}$	非課税 (n,d,q) 世帯

図３　世帯類型間の包含関係

これを式 (3.6)、(3.7) に代入して、非課税世帯率 ω^*、非課税世帯住民率 ρ^* は

$$\omega^* = \sum_{n=1}^{m} \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{q=1}^{f(n|l)} \omega(n)\,\phi(n,d)\,\psi(n,d,q)\,\gamma^*(n,d,q) = \sum_{i\,\in\,\Lambda} \omega(n)\,\phi(n,d)\,\psi(n,d,q)\,\gamma^*(n,d,q),$$

$$\rho^* = \sum_{n=1}^{m} \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{q=1}^{f(n|l)} \frac{n}{\bar{n}}\,\omega(n)\,\phi(n,d)\,\psi(n,d,q)\,\gamma^*(n,d,q) = \sum_{i\,\in\,\Lambda} \frac{n}{\bar{n}}\,\omega(n)\,\phi(n,d)\,\psi(n,d,q)\,\gamma^*(n,d,q),$$

で表される。i で和をとる式の各項の n, d, q は、扶養パタン番号 i の関数 $n(i)$, $d(i)$, $q(i)$ の意味である。

第 **3.** 節の内容は、扶養・被扶養の関係が同一世帯内のみに存在する限りにおいて厳密に成り立つ一般論であり、$|\Omega|$、$|\Omega_n|$、$|\Omega_{n,d}|$、$|\Omega_{n,d,q}|$、$|\Omega^*_{n,d,q}|$ の全てがわかる原データのリストが存在すればそのまま適用できるものである。

現実にはこの一般論を踏まえて、近似的と考えられる分布を出発点として、基本データである住基台帳人口調査結果との整合性が担保されるように ω, ϕ, ψ, γ^* を推計することが必要である。

4.　推計式の導出

本節では、全世帯に対する n 人世帯の割合 $\omega(n)$、n 人世帯に対する (n,d) 世帯の割合 $\phi(n,d)$、(n,d) 世帯に対する (n,d,q) 世帯の割合 $\psi(n,d,q)$、そして (n,d,q) 世帯における非課税世帯の割合 $\gamma^*(n,d,q)$ の４種類の比率を、公開されている住基台帳人口調査、課税状況調べ、そして国勢調査の報告書から推計する方法を述べる。以下、それぞれの推計値を記号にハットを付して表すこととする。

4.1　$\hat{\omega}(n)$ の導出

$\omega(n) = |\Omega_n|/|\Omega|$ は n 人世帯の全世帯に対する割合（世帯人員別世帯割合）であり、この分布については家族制度などの社会的要因により決まることから、基本的に統計調査の結果を利用するほかに術がない。

しかしながら、住民基本台帳ベースの人員による世帯分布 $\omega(n)$ は公表されていないため、本論文では直近の国勢調査結果による世帯人員別割合 $\omega'(n)$ を暫定分布として採用する。

さて、この暫定分布 $\omega'(n)$ は当然 $\sum_{n=1}^{m} \omega'(n) = 1$ を満たすが、この分布により計算した $\sum_{n=1}^{m} n\,\omega'(n)$ は一般に住基台帳人口調査による平均世帯人員 $\bar{n} = |R|/|H|$ と一致しない。そこで、国勢調査の人員別世帯分布 $\omega'(n)$ を、住基台帳人口調査の平均世帯人員と整合する分布（以下、「整合分布」と呼ぶ。）に補正することにより $\hat{\omega}(n)$ を求めることとする。

国勢調査の平均世帯人員を $\bar{n}'$ とすると

$$\sum_{n=1}^{m} \omega'(n) = 1, \quad \sum_{n=1}^{m} n\,\omega'(n) = \bar{n}'. \tag{4.1}$$

補正後の整合分布 $\hat{\omega}(n)$ については

$$\sum_{n=1}^{m} \hat{\omega}(n) = 1, \quad \sum_{n=1}^{m} n\,\hat{\omega}(n) = \bar{n}. \tag{4.2}$$

補正前の分布 $\omega'(n)$ がすでに近似的な分布であると仮定して、補正量の最小化条件を課す。ここでは式 (4.2) の拘束条件の元で、補正量を $\{\hat{\omega}(n) - \omega'(n)\}/\omega'(n)^{\mu}$（$\mu \geq 0$ はパラメータ）の二乗和として、これが最小となるように $\hat{\omega}(n)$ を定めよう。α と β を定数として

$$F = \sum_{n=1}^{m} \left\{ \frac{\hat{\omega}(n) - \omega'(n)}{\omega'(n)^{\mu}} \right\}^2 - 2\,\alpha \left\{ \sum_{n=1}^{m} \hat{\omega}(n) - 1 \right\} - 2\,\beta \left\{ \sum_{n=1}^{m} n\,\hat{\omega}(n) - \bar{n} \right\},$$

とすると、Lagrange の未定乗数法により、最小値を与える α と β は次の極値条件

$$\frac{\partial F}{\partial\,\hat{\omega}(\nu)} = 2 \left\{ \frac{\hat{\omega}(\nu) - \omega'(\nu)}{\omega'(\nu)^{2\mu}} \right\} - 2\,\alpha - 2\,\beta\,\nu = 0;$$

すなわち

$$\hat{\omega}(\nu) - \omega'(\nu) = (\alpha + \beta\,\nu)\,\omega'(\nu)^{2\mu}, \quad (1 \leq \nu \leq m) \tag{4.3}$$

を満たす。

この m 個の式を両辺それぞれ加え合わせた式及び両辺にそれぞれ k を掛けたものを加え合わせた式に、式 (4.1)、(4.2) を用いると

$$\begin{cases} \alpha \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \omega'(n)^{2\mu} + \beta \sum_{n=1}^{m} n\,\omega'(n)^{2\mu} = 0, \\ \alpha \displaystyle\sum_{n=1}^{m} n\,\omega'(n)^{2\mu} + \beta \sum_{n=1}^{m} n^2\,\omega'(n)^{2\mu} = \bar{n} - \bar{n}'. \end{cases} \tag{4.4}$$

この式 (4.4) を解いて得られた α、β を式 (4.3) に代入して、暫定分布の $\omega'(\nu)$ から整合分布 $\hat{\omega}(\nu)$ への補正式が次のとおり得られる。

$$\hat{\omega}(\nu) = \omega'(\nu) + \frac{\omega'(\nu)^{2\mu}}{\det A} \left\{ \nu \sum_{n=1}^{m} \omega'(n)^{2\mu} - \sum_{n=1}^{m} n\,\omega'(n)^{2\mu} \right\} \left(\bar{n} - \bar{n}' \right), \tag{4.5}$$

ここで、行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \omega'(n)^{2\mu} & \displaystyle\sum_{n=1}^{m} n\,\omega'(n)^{2\mu} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{m} n\,\omega'(n)^{2\mu} & \displaystyle\sum_{n=1}^{m} n^2\,\omega'(n)^{2\mu} \end{pmatrix},$$

である。

具体的な数値計算を行う際の μ の決定方法は第 **6.1** 節の第 13 表に付した（注）に記載する。

4.2　$\hat{\phi}(n,d)$ の導出

$\phi(n,d) \equiv |\Omega_{n,d}|/|\Omega_n|$ についてその推計式を求めよう。

まず、近似的な分布として場合の数による確率分布

$$\hat{\phi}'(n,d) \equiv \frac{|\tilde{\Omega}_{n,d}|}{|\tilde{\Omega}_n|},$$

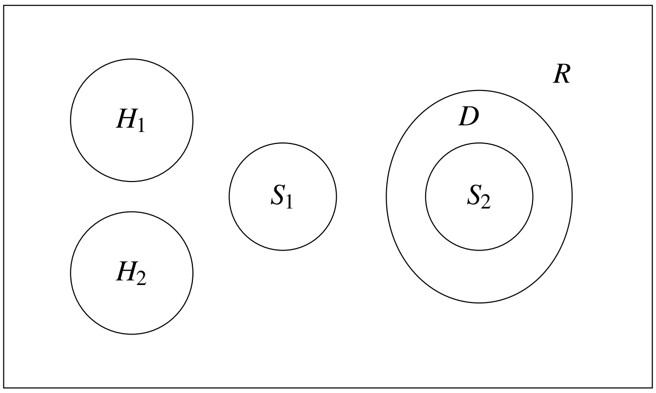
を考えよう。

図４は、世帯構成の組合せの場合の数 $|\tilde{\Omega}_{n,d}|$ を求めるために、全住民の集合 R にいくつかの部分集合を設定し、Venn diagram で示したものである。

(n,d) 世帯の構成を考える以上、世帯主の集合 H 及び被扶養者等の集合 D は必須である。実際には配偶者やその他の親族に扶養されている世帯主も存在するが、データの制約上

$$H \cap D = \emptyset,$$

を仮定した。



R : 全住民
H_1 : 単身世帯の世帯主
H_2 : ２人以上世帯の世帯主
D : 被扶養者等
S_1 : 世帯主の配偶者（可所得住民）
S_2 : 世帯主の配偶者（被扶養者等）

図４　各住民集合の Venn diagram

計算の基礎となる世帯構成を考えるに当たっては、精度向上の観点から、世帯における可所得住民となる住民の集合をできるだけ細かく定義しておいた方が望ましい。そこで、世帯主集合 H を単独世帯の世帯主集合 H_1 と２人以上世帯の世帯主集合 H_2 に分け、世帯主の配偶者の集合 S を、他の世帯員等に扶養されていない配偶者（可所得住民）S_1 と他の世帯員等に扶養されている配偶者（被扶養者等）S_2 に分ける。すなわち

$$H = H_1 + H_2, \quad S = S_1 + S_2 .$$

また

$$E \equiv D - S_2, \quad K \equiv R - H - S_1 - D,$$

と定義して、世帯構成を考える上で全住民 R を

$$R = H_1 + H_2 + S_1 + S_2 + E + K, \tag{4.6}$$

と直和分解する。これらの集合のうちで、$L = R - D = H_1 + H_2 + S_1 + K$ は可所得住民、$D = S_2 + E$ は被扶養者等である。式 (4.6) の直和分解を (n,d) 世帯暫定分布の計算の基礎としよう。

さて、n 人世帯の構成員それぞれは、この右辺の６つの部分集合のいずれかに属している。単身世帯は H_1 に属する者１人だけからなる。２人以上世帯は、世帯人員のうち H_2 に属する者が必ず１人だけいるが、世帯主の配偶者 $S = S_1 + S_2$ については

$$\begin{cases} S_1\text{ から }0\text{ 人}\quad\text{かつ}\quad S_2\text{ から }0\text{ 人} \\ S_1\text{ から }1\text{ 人}\quad\text{かつ}\quad S_2\text{ から }0\text{ 人} \\ S_1\text{ から }0\text{ 人}\quad\text{かつ}\quad S_2\text{ から }1\text{ 人} \end{cases}$$

の３通りの可能性がある。

すなわち式 (4.6) の直和分解に基づく世帯は次の４類型に分類され、それぞれの類型ごとに (n,d) 世帯の構成員の組み合わせの場合の数を数えることになる。

$$\begin{cases} \text{I 型}\quad\text{単独世帯} \\ \qquad\quad\text{(世帯主のみの世帯)} \\ \text{II 型}\quad\text{ひとり親等世帯} \\ \qquad\quad\text{(２人以上世帯で世帯主に配偶者がない世帯)} \\ \text{III 型}\quad\text{夫婦共働き世帯} \\ \qquad\quad\text{(世帯主に配偶者があり、そのいずれも被扶養者等でない世帯)} \\ \text{IV 型}\quad\text{専業主婦（夫）世帯} \\ \qquad\quad\text{(世帯主に配偶者があり、配偶者が被扶養者等である世帯)} \end{cases}$$

I 型の世帯の構成員は、H_1 に属する世帯主のみだから、世帯の構成員の組み合わせの場合の数 W_1 は

$$W_1 = |H_1| \quad (n = 1,\ \ d = 0)\,.$$

II 型の (n,d) 世帯では、世帯主が H_2 に属し、S_1、S_2 に属する者はなく、E に属する者が d 人、残りの $n-1-d$ 人が K に属するから、世帯の構成員の組合せの場合の数 W_2 は、$k \equiv n-1-d$ として

$$W_2 = \binom{|H_2|}{1}\binom{|S_1|}{0}\binom{|S_2|}{0}\binom{|E|}{d}\binom{|K|}{k} = |H_2|\binom{|E|}{d}\binom{|K|}{k}, \quad (n \geq 2,\ \ 0 \leq d \leq n-1)\,.$$

同様に考えて、III 型の場合の数 W_3 及び IV 型の場合の数 W_4 はそれぞれ

$$W_3 = \binom{|H_2|}{1}\binom{|S_1|}{1}\binom{|S_2|}{0}\binom{|E|}{d}\binom{|K|}{k-1} = |H_2|\,|S_1|\binom{|E|}{d}\binom{|K|}{k-1}, \quad (n \geq 2,\ \ 0 \leq d \leq n-2)$$

$$W_4 = \binom{|H_2|}{1}\binom{|S_1|}{0}\binom{|S_2|}{1}\binom{|E|}{d-1}\binom{|K|}{k} = |H_2|\,|S_2|\binom{|E|}{d-1}\binom{|K|}{k}, \quad (n \geq 2,\ \ 1 \leq d \leq n-1)$$

となる。

ここで、各型における n と d にかかる制限を式中に取り込むために、Kronecker の δ

$$\delta^{\mu}_{\nu} \equiv \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

を導入し、単独世帯の構成員の組合せの数を $W_{n=1}$ で、２人以上世帯の構成員の組合せの数を $W_{n\geq 2}$ で表すと、これらは

$$\begin{cases} W_{n=1} = \delta^d_0\, W_1\,, \\ W_{n\geq 2} = W_2 + \left(1-\delta^d_{n-1}\right)W_3 + \left(1-\delta^d_0\right)W_4\,. \end{cases}$$

また、$|\tilde{\Omega}_{n,d}|$ 及び $|\tilde{\Omega}_n|$ はそれぞれ

$$|\tilde{\Omega}_{n,d}| = \delta_1^n\, W_{n=1} + \left(1-\delta_1^n\right) W_{\nu\geq 2} = \delta_1^n\, \delta_0^d\, W_1 + \left(1-\delta_1^n\right) W_{n\geq 2}\,,$$

$$|\tilde{\Omega}_n| = \sum_{d=0}^{n-1} |\tilde{\Omega}_{n,d}| = \delta_1^n\, W_1 + \left(1-\delta_1^n\right) \sum_{d=0}^{n-1} W_{n\geq 2}\,,$$

であるから、$\phi'(n,d)$ は

$$\phi'(n,d) = \frac{|\tilde{\Omega}_{n,d}|}{|\tilde{\Omega}_n|} = \frac{\delta_1^n\, \delta_0^d\, W_1 + \left(1-\delta_1^n\right) W_{n\geq 2}}{\delta_1^n\, W_1 + \left(1-\delta_1^n\right) \sum_{d=0}^{n-1} W_{n\geq 2}} = \delta_1^n + \left(1-\delta_1^n\right) \frac{W_{n\geq 2}}{\sum_{d=0}^{n-1} W_{n\geq 2}}\,,$$

で計算される。ここで

$$W_{n\geq 2} = |H_2| \left\{ \binom{|E|}{d}\binom{|K|}{k} + \left(1-\delta_{n-1}^d\right) |S_1| \binom{|E|}{d}\binom{|K|}{k-1} + \left(1-\delta_0^d\right) |S_2| \binom{|E|}{d-1}\binom{|K|}{k} \right\},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{d=0}^{n-1} W_{n\geq 2} &= |H_2| \left\{ \sum_{d=0}^{n-1} \binom{|E|}{d}\binom{|K|}{k} + |S_1| \sum_{d=0}^{n-1} (1-\delta_{n-1}^d) \binom{|E|}{d}\binom{|K|}{k-1} + |S_2| \sum_{d=0}^{n-1} (1-\delta_0^d) \binom{|E|}{d-1}\binom{|K|}{k} \right\} \\
&= |H_2| \left\{ \sum_{d=0}^{n-1} \binom{|E|}{d}\binom{|K|}{k} + |S_1| \sum_{d=0}^{n-2} \binom{|E|}{d}\binom{|K|}{k-1} + |S_2| \sum_{d=1}^{n-1} \binom{|E|}{d-1}\binom{|K|}{k} \right\} \\
&= |H_2| \left\{ \binom{|E|+|K|}{n-1} + |S| \binom{|E|+|K|}{n-2} \right\},
\end{aligned}$$

である。

さて、ここで求めた近似的な分布 $\phi'(n,d)$ は当然 $\sum_{d=0}^{n-1} \phi'(n,d) = 1$ を満たすが、この分布により計算した $\sum_{n=1}^{m} \hat{\omega}(n) \sum_{d=0}^{n-1} d\, \phi'(n,d)$ は一般に基礎データにより計算した世帯平均被扶養者等人員 $\bar{d} = |D|/|\Omega| = |D|/|H|$ と一致しない。そこで、前節における $\omega'(n)$ の補正の手法に倣い、$\phi'(n,d)$ を暫定分布とし、これを補正することによって世帯平均被扶養者等人員についても整合する分布 $\hat{\phi}(n,d)$ を求める。

補正前の暫定分布の n 人世帯の平均被扶養者等人員を $\bar{d}\,'(n)$、補正後のそれを $\bar{d}(n)$ で表すと、暫定分布及び整合分布のそれぞれについて次式が成立しなければならない。

$$\sum_{d=0}^{n-1} \phi'(n,d) = 1\,, \quad \sum_{d=0}^{n-1} d\, \phi'(n,d) = \bar{d}\,'(n)\,, \quad \sum_{n=1}^{m} \hat{\omega}(n)\, \bar{d}\,'(n) = \bar{d}\,'\,, \tag{4.7}$$

$$\sum_{d=0}^{n-1} \hat{\phi}(n,d) = 1\,, \quad \sum_{d=0}^{n-1} d\, \hat{\phi}(n,d) = \bar{d}(n)\,, \quad \sum_{n=1}^{m} \hat{\omega}(n)\, \bar{d}(n) = \bar{d}\,. \tag{4.8}$$

暫定分布 $\phi'(n,d)$ はすでに近似的な分布と考えられるから、補正量の最小化条件を課す。

ここでは、まず $\{\bar{d}(n) - \bar{d}\,'(n)\}$ の二乗和を最小にする $\bar{d}(n)$ を求め、この結果を用いて $\{\hat{\phi}(n,d) - \phi'(n,d)\}$ の二乗和を最小にする $\hat{\phi}(n,d)$ を求める。

式 (4.8) の第３式を拘束条件とし、未定乗数を $2\,\alpha$ として

$$F = \sum_{n=2}^{m} \left\{ \bar{d}(n) - \bar{d}\,'(n) \right\}^2 - 2\,\alpha \left\{ \sum_{n=1}^{m} \hat{\omega}(n)\, \bar{d}(n) - \bar{d} \right\},$$

と置く。ここで、$n = 1$ すなわち単独世帯においては $\bar{d}(1) = \bar{d}\,'(1) = 0$ で補正は生じないことを考慮して第１項の和から $n = 1$ の場合を除いてある。

極値条件は

$$\frac{\partial F}{\partial\,\bar{d}(\nu)} = 2\left\{\bar{d}(\nu) - \bar{d}\,'(\nu)\right\} - 2\,\alpha\,\hat{\omega}(\nu) = 0\,, \quad (2 \le \nu \le m)\,;$$

すなわち

$$\bar{d}(\nu) - \bar{d}\,'(\nu) = \alpha\,\hat{\omega}(\nu)\,, \quad (2 \le \nu \le m)\,. \tag{4.9}$$

両辺に $\hat{\omega}(\nu)$ を掛けて $\nu = 2$ から $\nu = m$ までの $m - 1$ 個の式を加えると

$$\sum_{\nu=2}^{m}\left\{\bar{d}(\nu) - \bar{d}\,'(\nu)\right\}\hat{\omega}(\nu) = \alpha\,\sum_{\nu=2}^{m}\hat{\omega}(\nu)^2\,.$$

左辺の $\sum_{\nu=2}^{m}$ は $\sum_{\nu=1}^{m}$ としてもその値は変わらない（$\bar{d}(1) = \bar{d}\,'(1) = 0$）から、式 (4.7)、(4.8) それぞれの第３式を用いると

$$\bar{d} - \bar{d}\,' = \alpha\sum_{n=2}^{m}\hat{\omega}(n)^2\,. \tag{4.10}$$

式 (4.9)、(4.10) により

$$\bar{d}(\nu) - \bar{d}\,'(\nu) = \frac{\hat{\omega}(\nu)}{\sum_{n=2}^{m}\,\hat{\omega}(n)^2}\,(\bar{d} - \bar{d}\,')\,, \quad (2 \le \nu \le m) \tag{4.11}$$

となる。

次に (4.8) の初めの２式を拘束条件として、$\{\hat{\phi}(\nu,d) - \phi'(\nu,d)\}$ の二乗和が最小となるように $\hat{\phi}(\nu,d)$ を定めよう。$2\,\alpha_\nu$ と $2\,\beta_\nu$ を定数として

$$F_\nu = \sum_{d=0}^{n-1}\left\{\hat{\phi}(\nu,d) - \phi'(\nu,d)\right\}^2 - 2\,\alpha_\nu\left\{\sum_{d=0}^{\nu-1}\hat{\phi}(\nu,d) - 1\right\} - 2\,\beta_\nu\left\{\sum_{d=0}^{\nu-1} d\,\hat{\phi}(\nu,d) - \bar{d}(\nu)\right\},$$

とすると、Lagrange の未定乗数法により、最小値を与える α_ν と β_ν は次の極値条件

$$\frac{\partial F_\nu}{\partial\,\hat{\phi}(\nu,k)} = 2\left\{\hat{\phi}(\nu,k) - \phi'(\nu,k)\right\} - 2\,\alpha_\nu - 2\,\beta_\nu\,k = 0\,;$$

すなわち

$$\hat{\phi}(\nu,k) - \phi'(\nu,k) = \alpha_\nu + \beta_\nu\,k\,, \quad (0 \le k \le \nu - 1) \tag{4.12}$$

を満たす。

この ν 個の式を両辺それぞれ加え合わせた式及び両辺にそれぞれ k を掛けたものを加え合わせた式に、式 (4.7)、(4.8) を用いると

$$\begin{cases} \nu\cdot\alpha_\nu + \dfrac{1}{2}\,(\nu-1)\,\nu\cdot\beta_\nu = 0\,, \\ \dfrac{1}{2}\,(\nu-1)\,\nu\cdot\alpha_\nu + \dfrac{1}{6}\,(\nu-1)\,\nu\,(2\nu-1)\cdot\beta_\nu = \bar{d}(\nu) - \bar{d}\,'(\nu)\,. \end{cases} \tag{4.13}$$

この式 (4.13) を解いて得られる α_ν、β_ν を式 (4.12) に代入して、式 (4.11) を用いると、$2 \le \nu \le m$ のときの補正式が得られ、$\hat{\phi}(1{,}0) = \phi'(1{,}0)$ を考慮すると、暫定分布の $\phi'(\nu,k)$ から $\hat{\phi}(\nu,k)$ への補正式は次式で表される。

$$\hat{\phi}(\nu,k) = \phi\,'(\nu,k) + (1 - \delta_1^\nu)\cdot\frac{6}{\nu\,(\nu+1)}\left(\frac{2}{\nu-1}k - 1\right)\frac{\hat{\omega}(\nu)}{\sum_{n=2}^{m}\,\hat{\omega}(n)^2}\,(\bar{d} - \bar{d}\,')\,. \tag{4.14}$$

4.3　$\hat{\psi}(n,d,q)$ の計算

(n,d,q) 世帯の組合せの場合の数 $|\tilde{\Omega}_{n,d,q}|$ は、対応する扶養パタン番号 i の可所得者 l^i 人をその世帯の扶養パタン $\left(l_0^i, l_1^i, \cdots, l_d^i\right)$ に割り振る組合せの数

$$|\tilde{\Omega}_{n,d,q}| = \frac{l^i\,!}{\prod_{j=0}^{d}\left(l_j^i\,!\right)},$$

だから、$\psi(n,d,q)$ の推計値 $\hat{\psi}(n,d,q)$ は、次式で求まる[3]。

$$\hat{\psi}(n,d,q) = \frac{|\tilde{\Omega}_{n,d,q}|}{|\tilde{\Omega}_{n,d}|} = \frac{l^i\,!}{\prod_{j=0}^{d}\left(l_j^i\,!\right)} \Bigg/ \sum_{i\,\in\Lambda_{n,d}} \frac{l^i\,!}{\prod_{j=0}^{d}\left(l_j^i\,!\right)}. \tag{4.15}$$

4.4　$\hat{\gamma}^*(n,d,q)$ の計算

$\hat{\gamma}^*(n,d,q)$ は、(n,d,q) 世帯の可所得住民 $l^i = l_0^i + l_1^i + \cdots + l_d^i$ 人の全員が非課税である確率である。j 人を扶養している可所得住民の課税率（第 **4.5** 節で推計する）を $\hat{g}(j)$ とするときこの可所得住民の非課税率は $\{1-\hat{g}(j)\}$ だから、この (n,d,q) 世帯の可所得住民 l^i 人の全てが非課税である確率（(n,d,q) 世帯の非課税世帯率）は、積の法則を用いて

$$\hat{\gamma}^*(n,d,q) = \begin{cases} \prod_{j=0}^{d}\left\{1-\hat{g}(j)\right\}^{l_j^i} & : \text{全ての因子について、} l_j^i = 0 \text{ または } \hat{g}(j) \le 1 \text{ であるとき} \\ 0 & : l_j^i \ne 0 \text{ かつ } \hat{g}(j) > 1 \text{ となる因子があるとき} \end{cases}$$

で計算できる[4]。

4.5　j 人を扶養している可所得住民の課税率 $\hat{g}(j)$ の計算

課税統計から j 人の被扶養者等を扶養している課税者数 $|G_j|$ 人の推計が可能である（推計方法については、第 **5.2** 節で示す）。

j 人を扶養している可所得住民の数の推計値 $|\hat{L}_j|\ (0 \le j \le d)$ は、(n,d,q) 世帯（扶養パタン番号 i）で j 人を扶養している者 l_j^i 人にその世帯数推計値 $|\hat{\Omega}_{n,d,q}|$ を乗じて、全ての (n,d,q) について和を取ればよい。すなわち

$$|\hat{L}_j| = \sum_{n=1}^{m}\sum_{d=0}^{n-1}\sum_{q=1}^{f(n|l)} l_j^i \cdot |\hat{\Omega}_{n,d,q}| = \sum_{i\,\in\Lambda} l_j^i \cdot |\hat{\Omega}_{n,d,q}|. \tag{4.16}$$

ここで、$|\hat{\Omega}_{n,d,q}|$ は

$$|\Omega_{n,d,q}| = \frac{|\Omega_{n,d,q}|}{|\Omega|}\,|\Omega| = \frac{|\Omega_n|}{|\Omega|}\,\frac{|\Omega_{n,d}|}{|\Omega_n|}\,\frac{|\Omega_{n,d,q}|}{|\Omega_{n,d}|}\,|\Omega|,$$

の各因子を推計値で置き換えた

$$|\hat{\Omega}_{n,d,q}| = \hat{\omega}(n)\,\hat{\phi}(n,d)\,\hat{\psi}(n,d,q)\,|\Omega|, \tag{4.17}$$

で計算できる。

式 (4.16), (4.17) により計算される $|\hat{L}_j|$ を用いて、$\hat{g}(j)$ が次式で計算できる。

$$\hat{g}(j) = \frac{|G_j|}{|\hat{L}_j|}.$$

---

3) 式 (4.15) の分母は、もし $l^i = l_0^i + l_1^i + \cdots + l_d^i$ だけの条件で和を取れば、多項定理により $(1+d)^{l^i}$ になるところであるが、$n = 1\cdot l_0^i + 2\cdot l_1^i + \cdots + (1+d)\cdot l_d^i$ の拘束条件により、特定の l_j^i の組合せ（扶養パタン番号 $i \in \Lambda_{n,d}$ で指定できる組合せ）に限定されることから、このような形になっている。

4) $\hat{g}(j) = 1$ かつ $l_j^i = 0$ のときは、$\left\{1-\hat{g}(j)\right\}^{l_j^i} = 1$ として計算する。

5.　データセットの整備

2016 年 1 月 1 日時点の全国値を例に、推計手順と方法の具体を述べる。

5.1　利用統計

まず、第 **3.** 節及び第 **4.** 節で展開した一般論を適用する際に必要となるデータとそのソースとなる統計調査名を表 2 に示す。

このうち、国勢調査から得られる $\omega(n)$ を表 3 に、住基台帳人口調査から得られる $|R|, |\Omega| = |H|$ とこれから得られる $\bar{n} = |R|/|\Omega|$ を表 4 に示す。

残りのデータについては、国勢調査、住基台帳人口調査、課税状況調べのデータを加工して推計する必要がある。次節以降で、扶養人数別納税義務者数 $|G_j|$、被扶養者等人口 $|D|$、単身世帯の世帯主数 $|H_1|$、二人以上世帯の世帯主数 $|H_2|$、世帯主の配偶者数 $|S|$、世帯主の配偶者（可所得住民）数 $|S_1|$、世帯主の配偶者（被扶養者等）数 $|S_2|$ をこの順に推計する。

表 2　計算に必要となるデータ

記号	意味	統計調査名
$\omega(n)$	n 人世帯比率	国勢調査（対象時点前年）
$\|R\|$	人口	住基台帳人口調査
$\|\Omega\| = \|H\|$	世帯数 = 世帯主人口	住基台帳人口調査
$\bar{n} = \|R\|/\|\Omega\|$	平均世帯人員	住基台帳人口調査
$\|G_j\|$	j 人を扶養する納税義務者	課税状況調べのデータを加工して得られる
$\|L\|, \|D\|$	可所得人口及び被扶養者等人口	$\|R\|$ と課税状況調べのデータを加工して得られる
$\|H_1\|$	単独世帯の世帯主数	国勢調査及び住基台帳人口調査のデータを加工して得られる
$\|H_2\|$	２人以上世帯の世帯主数	国勢調査及び住基台帳人口調査のデータを加工して得られる
$\|S\|$	世帯主の配偶者数	国勢調査及び住基台帳人口調査のデータを加工して得られる
$\|S_1\|$	世帯主の配偶者（可所得住民）数	$\|L\| = \|R\| - \|D\|$ と課税状況調べのデータを加工して得られる
$\|S_2\|$	世帯主の配偶者（被扶養者等）数	$\|S_2\| = \|S\| - \|S_1\|$ で算出

表 3　国勢調査データ

世帯人員 n	1 人	2	3	4	5	6	7	8	9	10 人以上
ω (n)	0.345346	0.278943	0.175595	0.132550	0.045059	0.015220	0.005258	0.001496	0.000391	0.000141

表 4　住基台帳人口調査データ

	人口	世帯数（世帯主人口）	平均世帯人員
年	$\|R\|$	$\|\Omega\| = \|H\|$	$\bar{n} = \|R\|/\|\Omega\|$
2016 年	128,066,211	56,950,757	2.248718

5.2　納税義務者数 $|G_j|$ の推計

j 人を扶養する納税義務者数 $|G_j|$ を課税統計データをもとに推計する。まず、納税義務者（課税される者）には、「均等割と所得割」の市町村民税を納める者と「均等割のみ」の市町村民税を納める者があり、前者については j 人を扶養する納税義務者数 $|V_j|$ のデータがある。後者すなわち「均等割のみ」の納税者（課税標準額 ≤ 0 円）については納税義務者総数 $|U|$ のデータはあるが、j 人を扶養する納税義務者数のデータ $|U_j|$ が存在しない。

一方で、「均等割と所得割」の市町村民税を納める者については、課税標準額の段階別データが存在する[5)]。いま、「均等割と所得割」の市町村民税を納める者の課税標準額が最も低いランクである 1 万円以下のデータを v_j とし、「均等割のみ」の市町村民税を納める納税義務者の扶養人数別割合がこの v_j と同じであると仮定して $|U_j|$ を求めよう。

$$|U| = \sum_{j=0}^{m-1} |U_j|, \quad |v| = \sum_{j=0}^{m-1} |v_j|, \quad r_j = \frac{|v_j|}{|v|},$$

とすると、仮定により

$$|U_j| = \frac{|v_j|}{|v|} \cdot |U| = r_j \cdot |U|,$$

である。

これにより、「均等割と所得割」を納める者と「均等割のみ」を納める者の合計の扶養人数別納税義務者数 $|G_j|$ 及びその総数 $|G|$ は、

$$|G_j| = |U_j| + |V_j|, \quad |G| = \sum_{j=0}^{m-1} |G_j|,$$

で求まる。計算経過と結果を表 5 に示す。

表 5　納税義務者数 $|G_j|$ の推計

		（合計）	$j=0$ 人	1	2	3	4
均等割と所得割	$\lvert V_j\rvert$	56,791,365	35,289,908	10,971,009	5,583,193	3,699,993	1,031,215
課税標準額 ≤ 1 万円	$\lvert v_j\rvert$	261,579	202,209	43,122	12,094	3,116	767
$\lvert v_j\rvert$ の比率	r_j	1.000000	0.773032	0.164853	0.046235	0.011912	0.002932
均等割のみ	$\lvert U_j\rvert$	4,709,010	3,640,217	776,293	217,719	56,095	13,808
納税義務総数	$\lvert G_j\rvert$	61,500,375	38,930,125	11,747,302	5,800,912	3,756,088	1,045,023

		5	6	7	8	9 人以上
均等割と所得割	$\lvert V_j\rvert$	175,079	31,509	6,682	1,563	1,214
課税標準額 ≤ 1 万円	$\lvert v_j\rvert$	207	45	16	2	1
$\lvert v_j\rvert$ の比率	r_j	0.000791	0.000172	0.000061	0.000008	0.000004
均等割のみ	$\lvert U_j\rvert$	3,726	810	288	36	18
納税義務総数	$\lvert G_j\rvert$	178,805	32,319	6,970	1,599	1,232

5.3　可所得人口 $|L|$ 及び被扶養者等人口 $|D|$ の推計

第 **5.2** 節で j 人を扶養する納税義務者数 $|G_j|$ が得られた。j 人を扶養する納税義務者数 $|G_j|$ に扶養される被扶養者数を $|D'_j|$ とすると

$$|D'_j| = j \cdot |G_j|,$$

5) 課税状況調べ　第 17 表　控除対象配偶者及び扶養親族の人員別平成 28 年度納税義務者数に関する調（調査票第 22 表）

だから、納税義務者に扶養される被扶養者数の合計 $|D'|$ は

$$|D'| = \sum_{j=0}^{m-1} j \cdot |G_j|,$$

で求まる。計算経過と結果を表 6 に示す。

表 6　納税義務者が扶養する被扶養者等 $|D'|$ の推計

		(合計)	$j=0$ 人	1	2	3	4
納税義務者数	$\|G_j\|$	61,500,375	38,930,125	11,747,302	5,800,912	3,756,088	1,045,023
被扶養者数	$\|D'_j\|$	39,958,093	0	11,747,302	11,601,824	11,268,264	4,180,091

		5	6	7	8	9 人以上
納税義務者数	$\|G_j\|$	178,805	32,319	6,970	1,599	1,232
被扶養者数	$\|D'_j\|$	894,027	193,915	48,790	12,792	11,088

いま、全ての可所得住民数 $|L|$（納税義務者でない者を含む）に対する全ての被扶養者数 $|D|$ の比率が、納税義務者である可所得住民数 $|G|$ に対する納税義務者に扶養されている被扶養者数 $|D'|$ の比率に等しいと仮定し、この比率を $1/\lambda$ と置くと

$$\frac{|D|}{|L|} = \frac{1}{\lambda} = \frac{|D'|}{|G|}. \tag{5.1}$$

一方、

$$|L| = |R| - |D|, \tag{5.2}$$

だから、式 (5.1) の第 1 式及び式 (5.2) を連立させて、$|L|$ と $|D|$ は

$$|L| = \frac{\lambda}{1+\lambda}|R|, \quad |D| = \frac{1}{1+\lambda}|R|,$$

で計算できる。計算過程と結果を表 7 に示す。

表 7　可所得人口 $|L|$ 及び被扶養者等人口 $|D|$ の推計

$\|G\|$	$\|D'\|$	λ	$\|R\|$	$\|L\|$	$\|D\|$
61,500,375	39,958,091	1.539122	128,066,211	77,629,005	50,437,206

5.4　世帯主数 $|H_1|$、$|H_2|$、世帯主の配偶者数 $|S|$、$|S_1|$、$|S_2|$ の推計

国勢調査により、下表に示すデータが取得できる[6]。

項目	単独世帯主数	２人以上世帯の世帯主数	世帯主の配偶者数	世帯主以外の世帯員の配偶者数
記号	$\|H'_1\|$	$\|H'_2\|$	$\|S'_1\|$	$\|S'_2\|$
データ	18,417,922	34,913,875	28,276,007	1,196,148

住基台帳人口調査の世帯数 $|\Omega| = |H|$ を用いて、推計対象時点の単独世帯の世帯主数 $|H_1|$、２人以上世帯の世帯主数 $|H_2|$、世帯主の配偶者数 $|S|$ を

$$|H_1| = \frac{|H'_1|}{|H'_1| + |H'_2|}|H|, \quad |H_2| = \frac{|H'_2|}{|H'_1| + |H'_2|}|H|, \quad |S| = \frac{|S'_1|}{|H'_1| + |H'_2|}|H|,$$

6) 平成 27 年国勢調査人口等基本集計　第 14-1 表

で推計する。

課税状況調べにより、納税義務者が扶養する控除対象配偶者の数 $|T'|$ が取得できる。

項目 記号	納税義務者が扶養する控除対象配偶者数 $\lvert T'\rvert$
データ	13,513,620

非納税義務者が扶養する配偶者を含む全体の被扶養配偶者の数を $|T|$ とする。可所得住民数 $|L|$ に対する被扶養配偶者数 $|T|$ の割合が、納税義務者数 $|G|$ に対する控除対象配偶者数 $|T'|$ の比率に等しいと仮定して

$$|T| = \frac{|T'|}{|G|}\,|L|\,.$$

全体の被扶養配偶者数 $|T|$ のうち、世帯主に扶養される配偶者 $|S_2|$ は、国勢調査による比率を適用して

$$|S_2| = \frac{|S_1'|}{|S_1'| + |S_2'|}\,|T|,$$

で推計する。

世帯主の配偶者であって被扶養者でない（可所得住民の）配偶者数 $|S_1|$ は、

$$|S_1| = |S| - |S_2|,$$

で求まる。これらの結果を表 8 に示す。

表 8　世帯主 $|H_1|$, $|H_2|$ 及び配偶者 $|S|$, $|S_1|$, $|S_2|$ の推計結果

$\lvert H_1\rvert$	$\lvert H_2\rvert$	$\lvert S\rvert$	$\lvert S_1\rvert$	$\lvert S_2\rvert$
19,667,715	37,283,042	30,194,745	13,829,439	16,365,306

6.　計算結果と考察

6.1　計算結果

第 **5.** 節で整備したデータを用いて計算した結果を、表 9 から 16 までに示す。表 16 には、参考のため、2011 年と 2006 年の計算結果についても記載した。また、第 **4.2** 節の前半で述べた $\phi'(n,d)$（表 11）の計算式中の二項係数の計算については、Stirling の近似式 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$ $(n \gg 1)$ を利用した次式を用いた。

$$\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!\,(N-r)!} \approx \frac{1}{r!}\,\frac{\sqrt{2\pi N}\left(\dfrac{N}{\mathrm{e}}\right)^N}{\sqrt{2\pi(N-r)}\left(\dfrac{N-r}{\mathrm{e}}\right)^{N-r}} = \frac{1}{\mathrm{e}^r}\,\frac{N^r}{r!}\left(1-\frac{r}{N}\right)^{-(N-r+\frac{1}{2})}.$$

表 9　世帯人員別世帯割合 $\hat{\omega}(n)$ の推計［式 (4.5) の $\mu = 6.02$ として算出。表 13 の（注）を参照。］

世帯人員	1 人	2	3	4	5	6	7	8	9	10 人以上
暫定　$\omega'(n)$	0.345346	0.278943	0.175595	0.132550	0.045059	0.015220	0.005258	0.001496	0.000391	0.000141
補正後 $\hat{\omega}(n)$	0.426470	0.198488	0.174959	0.132518	0.045059	0.015220	0.005258	0.001496	0.000391	0.000141

表 10　世帯人員別平均被扶養者等人員 $\bar{d}(n)$ の推計

世帯人員	1 人	2	3	4	5	6	7	8	9	10 人以上
暫定　$\bar{d}'(n)$	0.000000	0.709230	1.492018	2.297696	3.113440	3.934499	4.758704	5.584927	6.412520	7.241087
補正後 $\bar{d}(n)$	0.000000	0.581662	1.379572	2.212526	3.084480	3.924716	4.755325	5.583966	6.412269	7.240996

表 11　(n,d) 分布 $\hat{\phi}(n,d)$ の推計

暫定分布　$\phi'(n,d)$

世帯人員 被扶養者等	1 人	2	3	4	5	6	7	8	9	10 人以上
0 人	1.000000	0.290770	0.057008	0.010296	0.001802	0.000311	0.000053	0.000009	0.000002	0.000000
1		0.709230	0.393966	0.120161	0.029787	0.006658	0.001399	0.000283	0.000055	0.000011
2			0.549026	0.431093	0.176898	0.055576	0.015091	0.003739	0.000870	0.000193
3				0.438450	0.436194	0.223420	0.084757	0.027046	0.007710	0.002030
4					0.355319	0.423748	0.258975	0.114863	0.042061	0.013549
5						0.290287	0.401394	0.284093	0.143975	0.059438
6							0.238330	0.373662	0.299865	0.170701
7								0.196306	0.343409	0.307601
8									0.162053	0.312485
9 人以上										0.133991

補正後分布　$\hat{\phi}(n,d)$

世帯人員 被扶養者等	1 人	2	3	4	5	6	7	8	9	10 人以上
0 人	1.000000	0.418338	0.113231	0.035847	0.007594	0.001708	0.000415	0.000089	0.000018	0.000005
1		0.581662	0.393966	0.128678	0.032683	0.007496	0.001641	0.000340	0.000068	0.000015
2			0.492803	0.422576	0.176898	0.055856	0.015212	0.003773	0.000878	0.000196
3				0.412899	0.433298	0.223140	0.084757	0.027057	0.007714	0.002032
4					0.349527	0.422910	0.258854	0.114851	0.042061	0.013550
5						0.288890	0.401153	0.284058	0.143971	0.059437
6							0.237968	0.373605	0.299856	0.170700
7								0.196226	0.343397	0.307598
8									0.162036	0.312481
9 人以上										0.133986

表 12　$|\hat{L}_j|, \hat{\psi}(n,d,q), \hat{\gamma}^*(n,d,q)$ の計算に用いる扶養パタン表（$n=6$ のみ抜粋）

i	n	n の分解	l	d	q	l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	$\hat{\omega}(n)$	$\hat{\phi}(n,d)$	$\hat{\psi}(n,d,q)$	$\hat{\gamma}^*(n,d,q)$
19	6	1+1+1+1+1+1	6		1	6						0.015220	0.001708	1.000000	0.000062
20	6	1+1+1+1+2	5	1	1	4	1						0.007496	1.000000	0.000360
21	6	1+1+1+3	4	2	1	3		1					0.055856	0.400000	0.002327
22	6	1+1+2+2	4	2	2	2	2							0.600000	0.002104
23	6	1+1+4	3	3	1	2			1				0.223140	0.300000	0.002267
24	6	1+2+3	3	3	2	1	1	1						0.600000	0.013607
25	6	2+2+2	3	3	3		3							0.100000	0.012301
26	6	1+5	2	4	1	1				1			0.422910	0.400000	0.013782
27	6	2+4	2	4	2		1		1					0.400000	0.013256
28	6	3+3	2	4	3			2						0.200000	0.088001
29	6	6	1	5	1						1		0.288890	1.000000	0.419416

表 13　可所得住民の扶養人数別課税率 $\hat{g}_j$ の推計

扶養する人数		（合計）	$j=0$ 人	1	2	3	4
納税義務者	$\lvert G_j \rvert$	61,500,375	38,930,125	11,747,302	5,800,912	3,756,088	1,045,023
可所得住民	$\lvert \hat{L}_j \rvert$	77,629,005	48,584,086	15,272,909	8,247,544	3,984,920	1,122,908
課税率	$\hat{g}_j$	0.792234	0.801294	0.769159	0.703350	0.942576	0.930639

扶養する人数		5	6	7	8	9 人以上
納税義務者	$\lvert G_j \rvert$	178,805	32,319	6,970	1,599	1,232
可所得住民	$\lvert \hat{L}_j \rvert$	307,975	84,023	19,394	4,166	1,080
課税率	$\hat{g}_j$	0.580584	0.384647	0.359392	0.383794	1.141247

(注) 式 (4.5) の μ の値によってはこの表の扶養人数 3〜4 人の課税率が 1 を超えるため、μ を変化させてシミュレーションを行い、扶養人数 3〜4 人の課税率の和が最小となるように μ を定めた。2016 年推計においては $\mu=6.02$ である。

表 14　n 人世帯における非課税世帯率 $\hat{\tau}^*(n)$ を用いて算出した全世帯に対する n 人非課税世帯の割合 $\hat{\omega}^*(n)$

世帯人員	1 人	2	3	4	5	6	7	8	9	10 人以上
$\hat{\omega}(n)$	0.426470	0.198488	0.174959	0.132518	0.045059	0.015220	0.005258	0.001496	0.000391	0.000141
$\hat{\tau}^*(n)$	0.198706	0.150789	0.165149	0.049051	0.043585	0.135555	0.164329	0.153858	0.137219	0.037996
$\hat{\omega}^*(n)$	0.084742	0.029930	0.028894	0.006500	0.001964	0.002063	0.000864	0.000230	0.000054	0.000005

表 15　n 人世帯における非課税世帯率 $\hat{\tau}^*(n)$ を用いて算出した全住民に対する n 人非課税世帯住民の割合 $\hat{\rho}^*(n)$

世帯人員	1 人	2	3	4	5	6	7	8	9	10 人以上
$\hat{\rho}(n)$	0.189650	0.176534	0.233412	0.235721	0.100187	0.040611	0.016369	0.005322	0.001564	0.000629
$\hat{\tau}^*(n)$	0.198706	0.150789	0.165149	0.049051	0.043585	0.135555	0.164329	0.153858	0.137219	0.037996
$\hat{\rho}^*(n)$	0.037685	0.026619	0.038548	0.011562	0.004367	0.005505	0.002690	0.000819	0.000215	0.000024

表 16　非課税世帯率・非課税世帯数及び非課税世帯住民率・非課税世帯住民数

対象年	世帯総数 $\lvert\Omega\rvert$	非課税世帯率 $\hat{\omega}^* = \sum \hat{\omega}^*(n)$	非課税世帯数 $\lvert\hat{\Omega}^*\rvert$	住民総数 $\lvert R\rvert$	非課税世帯住民率 $\hat{\rho}^* = \sum \hat{\rho}^*(n)$	非課税世帯住民数 $\lvert\hat{R}^*\rvert$
2016 年	56,950,757	0.155247	8,841,427	128,066,211	0.128033	16,396,742
2011 年	53,783,435	0.146837	7,897,380	126,923,410	0.120475	15,291,090
2006 年	51,102,005	0.127067	6,493,400	127,055,025	0.105732	13,433,761

6.2　計算結果の概要

結果として得られた各年の非課税世帯率 $\hat{\omega}^*$ は 12.7〜15.5 %であり、第 **1.** 節「はじめに」で触れた田中の全国消費実態調査に基づく先行研究の結果（2004 年 18.1 %、2009 年 13.4 %）及び江口・川上の首都圏 D 市における調査結果（1996 年 16.3 %）と大きな齟齬はない。

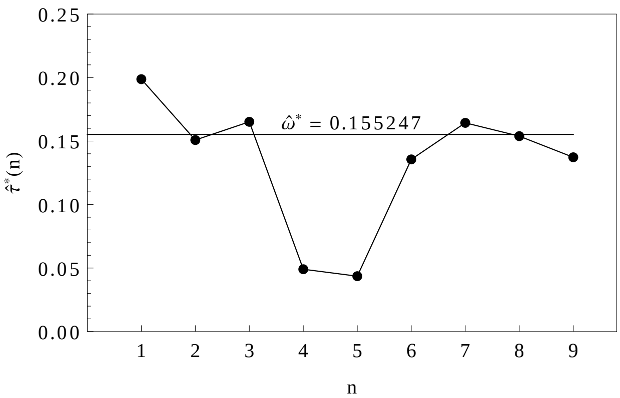


図 5　世帯人員別非課税世帯率

2016 年の世帯人員別非課税世帯率を図 5 に示した。単独世帯の非課税世帯率が最も大きく、4〜5 人世帯を底としてU字カーブを描いている状況は、時点は異なるが、田中の得た 1〜6 人世帯の結果（2009 年）と共通である。（田中はその分析目的から、世帯主年齢が 65 歳未満と 65 歳以上に分類してグラフにしており、世帯人員別非課税世帯率そのものの単純な比較はできない。）

非課税世帯住民数 $\hat{\rho}^*$ の 3 年間の計算結果は、1340〜1640 万人であった。

この結果に関して、第 **1.** 節の脚注で触れた厚生労働省による非課税世帯住民数の推計値 3100 万人（2010 年）との関係について述べておく。課税世帯と非課税世帯の世帯構成員を表 17 に示した。A、B、C は課税状況調べで公表されているが、X、Y、Z は不明である。厚生労働省は、全人口 R から B と C のみを控除した結果をもって非課税世帯に属する住民の数としている。しかしこれは表から分かるとおり、課税世帯に属する住民 $A + X + Y_1 + Z_1$ を含んでおり、明らかに我々が求めようとする本来の非課税世帯住民数 $Y_2 + Z_2$ を大きく上回るものとなっている。

実は、我々はすでに第 **5.3** 節の表 6 で、$|D'|$ として $X + C$ の値を推計している。この結果と本論文で推計した結果を利用して作成した表 18 によれば、非課税世帯住民数は各年ともこの表の残差の約 60 % という結果であり、逆にこの結果を利用して、住基台帳人口調査の人口と課税状況調べのデータのみを用いて非課税世帯住民数の概数を見積もることができる。

表 17　課税世帯と非課税世帯の構成員表

	納税義務者 均等割のみ	納税義務者 均等割＋所得割	A の 被扶養者	B の 被扶養者	非納税義務者 可所得住民	Y_1、Y_2 の 被扶養者
課税世帯	A	B	X	C	Y_1	Z_1
非課税世帯	–	–	–	–	Y_2	Z_2

表 18　非課税世帯住民数について

	人口	納税義務者 均等割のみ	納税義務者 均等割＋所得割	A の 被扶養者	B の 被扶養者	$R-$ $(A + B + X + C)$	非課税世帯 住民数	
	$\lvert R\rvert$	A	B	X	C	残差	$\lvert\hat{R}^*\rvert$	$\lvert\hat{R}^*\rvert$ / 残差
2016 年	128,066,211	4,709,010	56,791,365	1,458,478	38,499,615	26,607,743	16,396,742	0.616239
2011 年	126,923,410	4,615,950	54,682,445	1,676,195	40,491,913	25,456,907	15,291,090	0.600666
2006 年	127,055,025	4,153,633	55,037,929	1,930,476	43,535,286	22,397,701	13,433,761	0.599783

7.　まとめと今後の課題

本論文では、組合せ論的考察による扶養パタン分析を基礎として、個人に関する課税状況調べのデータ並びに世帯に関する住基台帳人口調査及び国勢調査のデータを用いて非課税世帯に関する知見が得られることを示した。得られた結果の表 16 からは課税世帯、非課税世帯それぞれの平均世帯人員を算出できるなど、第 **6.** 節に記載した各種結果表を用いて様々な分析が可能である。また本論文の手法は、データの入手可能性の問題はあるとしても、自治体レベルの母集団に対しても適用できる手法であると考えている。

本論文では一般に公表されているデータのみから推計を行う方針をとったため、住民基本台帳ベースの世帯人員別世帯割合として、国勢調査の $\omega(n)$ を暫定近似分布と仮定して計算せざるを得なかったが、常住地主義により把握した国勢調査の世帯では世帯をまたがって扶養・被扶養の関係が生じ、理論と齟齬が生じている可能性がある。実際に 2011 年と 2006 年の推計では 3 人扶養及び 4 人扶養の可所得住民について、ごく僅かではあるがその課税率が 1 を超える現象が起こっている。今後、国勢調査結果からより適切な住民基本台帳ベースの世帯人員別世帯割合を推計する手法を開発し、その結果を用いて本論文の理論の無矛盾性を検証することが課題である。

謝辞

本論文について丁寧な査読をしていただき、多くの改善点の指摘とともに示唆に富む有益なコメントをくださいました匿名の２名の査読者に感謝申し上げます。

参　考　文　献

[1]　G.E.Andrews and Kimmo Eriksson (2004), Integer Partitions, Cambridge U.P..
（佐藤文広 訳,『整数の分割』, 数学書房.）

[2]　田中聡一郎 (2013), 市町村民税非課税世帯の推計と低所得者対策, 三田学会雑誌, 第 105 巻 4 号, pp.55-78..

[3]　厚生労働省 社会保障制度の低所得者対策の在り方に関する研究会（第 1 回）関連資料 (2012.05.28),
https://www.mhlw.go.jp/stf/shingi/2r9852000002b1nq-att/2r9852000002bkz5.pdf, p.27.

[4]　江口英一・川上昌子 (2009),『日本における貧困世帯の量的把握』, 法律文化社, p.143 表 3-2-3.