Excelを用いた行列演算

（統計専門課程国民・県民経済計算の受講に向けて）

総務省統計研究研修所

2019年８月最終改訂

総務省統計研究研修所
Statistical Research
and Training Institute.

この教材について

- 統計研究研修所の一部の研修では、計量経済学に関する内容が含まれます。
- この教材は、計量経済学の一つ研究分野である産業連関表の計算やSNAを用いた回帰分析に欠かせない連立方程式の解法及び行列、ベクトルとの関係や、Excelを用いた行列の計算方法について、解説しています。
- また、計量経済学を理解する上で必要となる初歩的な内容に関しては、時間の関係上ふれられない場合もあることから、研修を受講する前に読むことを想定して、計量経済学とは何か、また計量経済学で使用する経済モデルに簡単に学んでいただくためのものです。

目次

第１章
連立方程式の解法及び行列、ベクトルとの関係

◆第１章では、

計量経済学においては経済モデルを連立方程式で表すことがあり、具体的な数値を当てはめ、予測値等を算出するには、連立方程式の解法技術が必須となります。第１章では、連立方程式の解き方について解説し、連立方程式と関係の深い行列やベクトルについてふれます。

◆連立１次方程式の解き方

連立１次方程式の解法をその係数に着目して考える。

xやyを外して表す

$$\begin{cases} x+\ \ y=2 \cdots ① \\ x+3y=4 \cdots ② \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

ある式の定数倍を他の式に加える
(①×(-1)+②)

ある行の定数倍を他の行に加える
(１行目×(-1)+２行目)

$$\begin{cases} x+y=2 \cdots ③ \\ \quad 2y=2 \cdots ④ \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

ある式に０以外の数を掛ける
(④×$\frac{1}{2}$)

ある行に０以外の数を掛ける
(２行目×$\frac{1}{2}$)

$$\begin{cases} x+y=2 \cdots ⑤ \\ \quad\ \ y=1 \cdots ⑥ \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ある式の定数倍を他の式に加える
⑥×(-1)+⑤

ある行の定数倍を他の行に加える
(２行目×(-1)+１行目)

$$\begin{cases} x \quad\ =1 \\ \quad\ \ y=1 \end{cases} \qquad \begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ \text{(x列)}\ \text{(y列)} \end{array}$$

＊係数のみを取り出しているのでx,yの列（位置）は固定

総務省統計研究研修所
Statistical Research and Training Institute

◆連立１次方程式の解き方（その２）

連立１次方程式を係数演算だけで解いてみる。

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 11 \\ 2x + 3y - 4z = 3 \end{cases} \quad \cdots (a)$$

xやyを外して表す

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

1行目×(− 1)+2行目
1行目×(− 1)+3行目

1行目×(− 1)+2行目×(− 1)+3行目

3行目×$(-\frac{1}{7})$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x \quad\quad\quad = 1 \\ \quad y \quad\quad = 3 \\ \quad\quad z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

3行目×(− 1)+2行目
3行目×(− 1)+1行目

2行目×(− 1)+1行目

総務省統計研究研修所
Statistical Research and Training Institute

◆行列・ベクトルという記述法

(a)の連立１次方程式の左辺の記述を構造的に見てみる。

$$
\begin{cases}
x+y+z=6 \\
x+2y+2z=11 \\
2x+3y-4z=3
\end{cases}
\quad \cdots (a)
$$

ｘやｙを外して表す

x	y	z
1	1	1
1	2	2
2	3	-4

変数を縦に分配しているとみることができる。
この操作を行列とベクトルの積と定義する。

ルールを変えずに
書き方を変える

行列	ベクトル
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

数式は要素を横に並べることが基本となる。そのルールに従い記述。

◆行列・ベクトルという記述法（その２）

連立１次方程式を行列とベクトルを用いて書き直す。

＞連立方程式で記載

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

行列で記載

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

一般化

＞一般化した式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

添字などを使って変数を表すと便利なこともある

ベクトルで記載

$$[A] \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

ここでは便宜行列を[A]、（定数項）ベクトルを$\vec{b}$などの記述をしている。

◆ベクトル$\vec{x}$を求めるには

ベクトル $\vec{x}$ (解ベクトル）を求める演算を考える。

$$[A]\cdot\vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{x} = \boxed{\frac{1}{[A]}}\cdot\vec{b}$$

注)
行列には割り算が定義されていませんので、
左の式の変形は数学的には正しくありません。
これは、あくまでも概念です。

この演算式を「逆行列」と呼び$[A^{-1}]$と書く。

すなわち、「逆行列」$[A^{-1}]$を求めることができれば、
定数項ベクトル $\vec{b}$ との積で解ベクトルを求めることができる。

第2章
Excelを用いた行列の計算方法

◆第2章では、

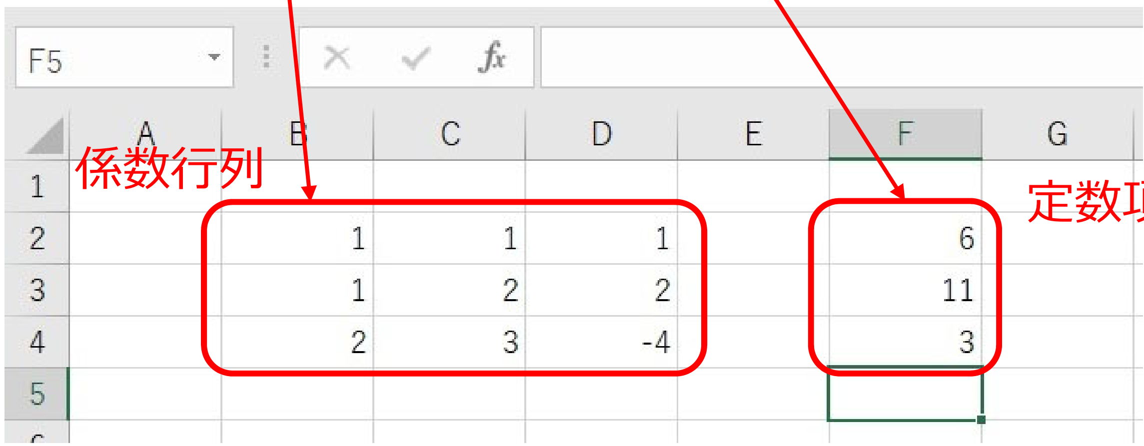
Excelを用いた行列の計算方法を解説します。第2章の一連の流れを踏むことで、Excelを用いて行列から連立方程式を解く操作方法を習得できます。

◆セルに行列を入力する方法

（方法a）係数行列と定数項ベクトルをセルに入力する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

係数行列



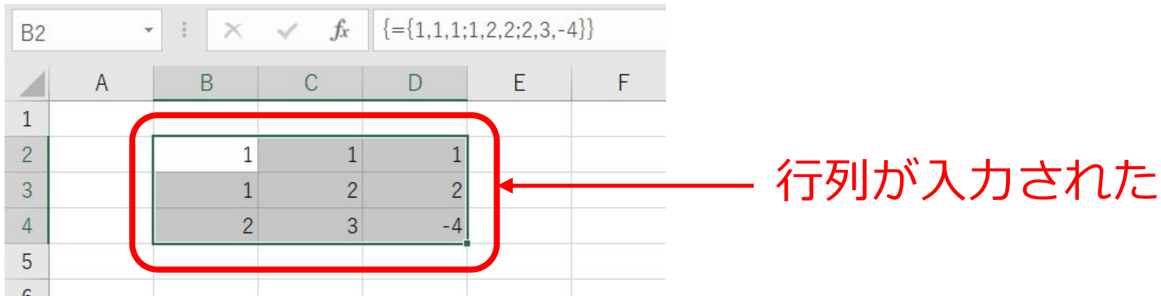
定数項ベクトル

◆セルに行列を入力する方法(その２)

（方法b）入力する行数、列数分を連続したセルで選択（この場合は３行×３列）、{}と「,」と「;」を用い入力し、入力後、Ctrl+Shift+Enterを同時に押す。

＞入力画面

＞Ctrl+Shift+Enterを押した後の画面



総務省統計研究研修所
Statistical Research and Training Institute

◆行列［A］の逆行列［A^{-1}］の求め方

＞使用する関数

逆行列の計算　MINVERSE(行列の左上のセル ： 行列の右下のセル)

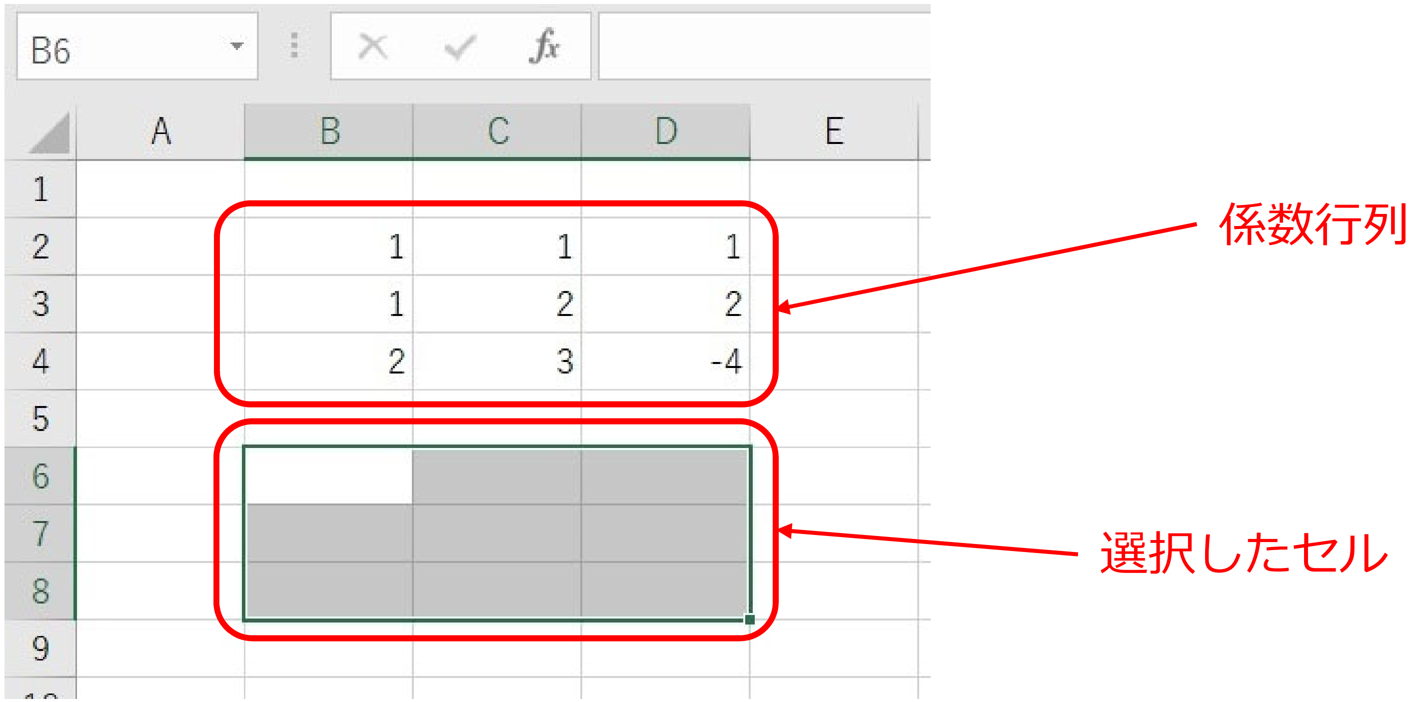
行列の積の計算　MMULT(行列Aの左上のセル ： 行列Aの右下のセル , 行列Bの左上のセル ： 行列Bの右下のセル)

＞ポイントとなる操作

入力後は、Ctrl+Shift+Enterを同時に押す。

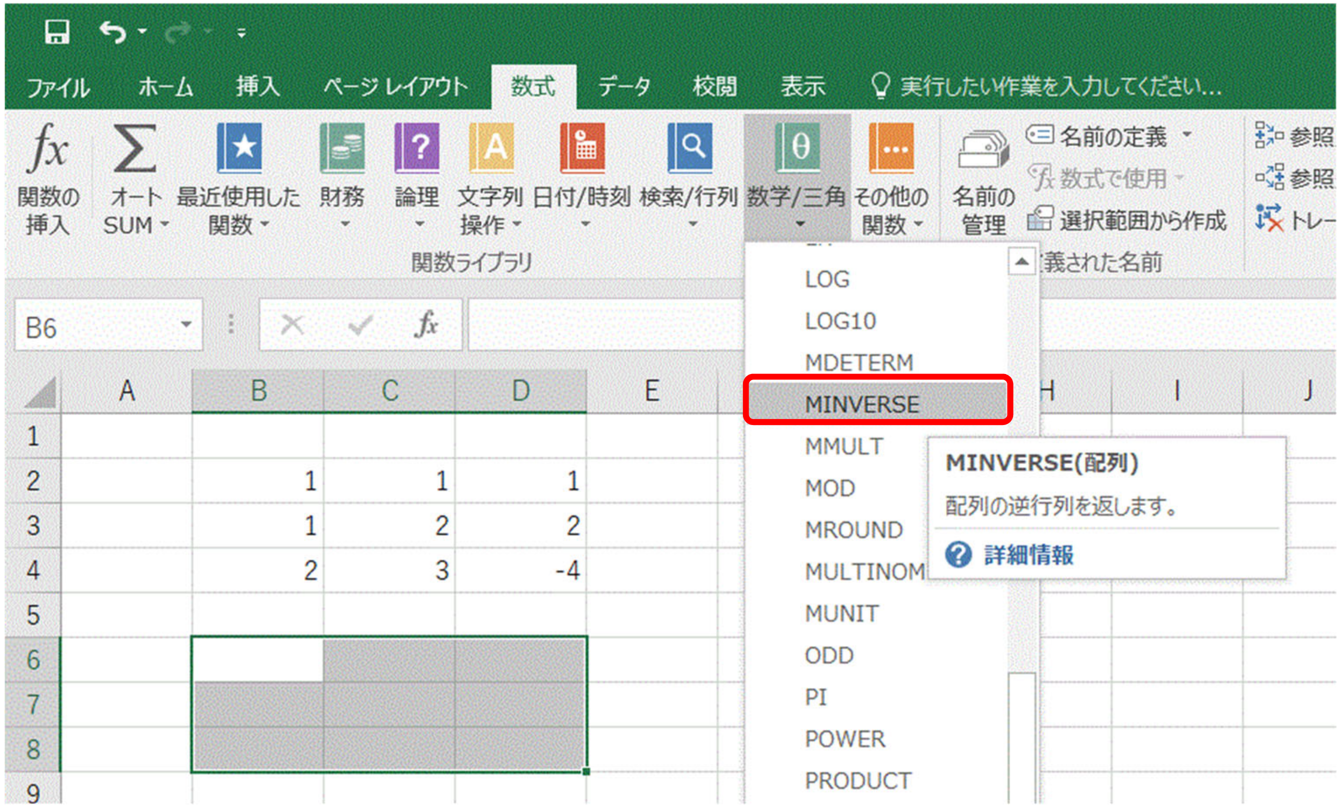
◆行列［A］の逆行列［A^{-1}］の求め方（その２）

(共通)係数行列（この場合は３行×３列）と同じ大きさ（３行×３列）の任意のセルを選択する。



◆行列［A］の逆行列［A^{-1}］の求め方（その３）

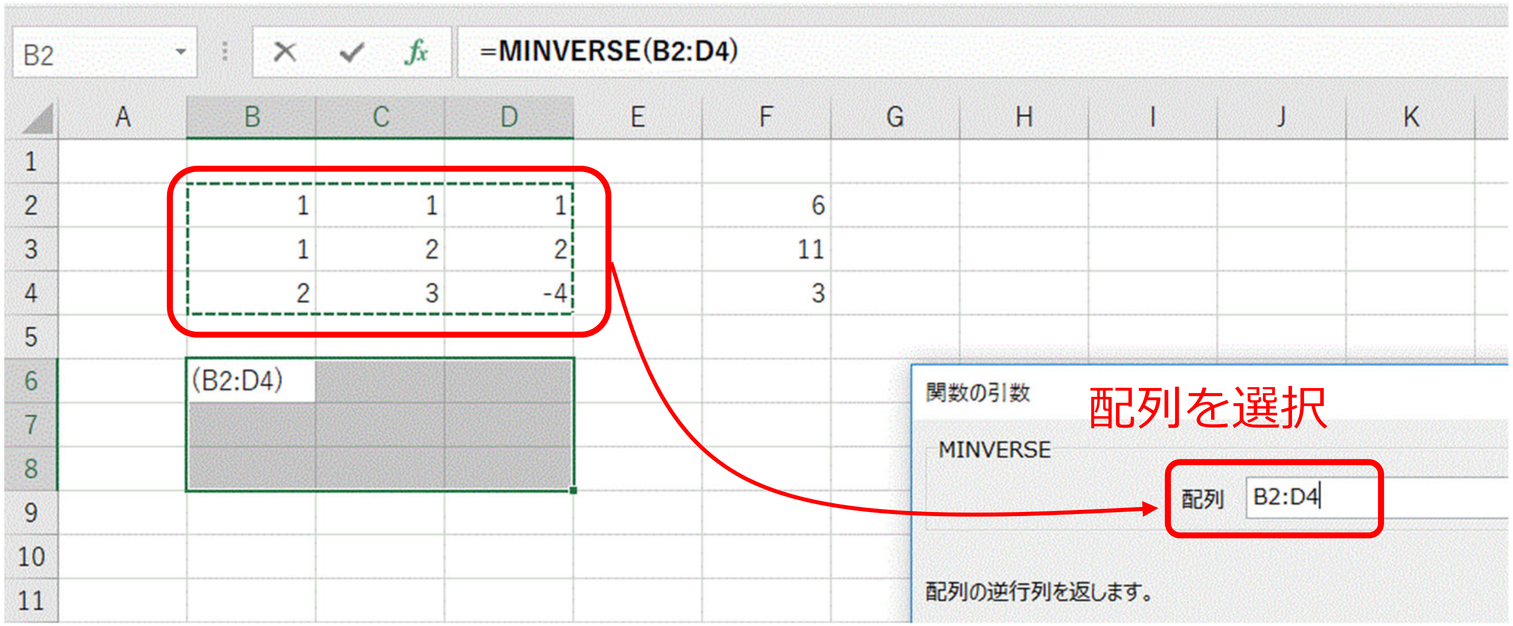
(方法a)「数式」の「数学/三角」のプルダウンメニューから
関数「MINVERSE」を選択する。



◆行列［A］の逆行列［A^{-1}］の求め方（その４）

(方法a)逆行列を算出したい行列（この場合はB2:D4）を選択し、
Ctrl+Shift+Enterを同時に押す。

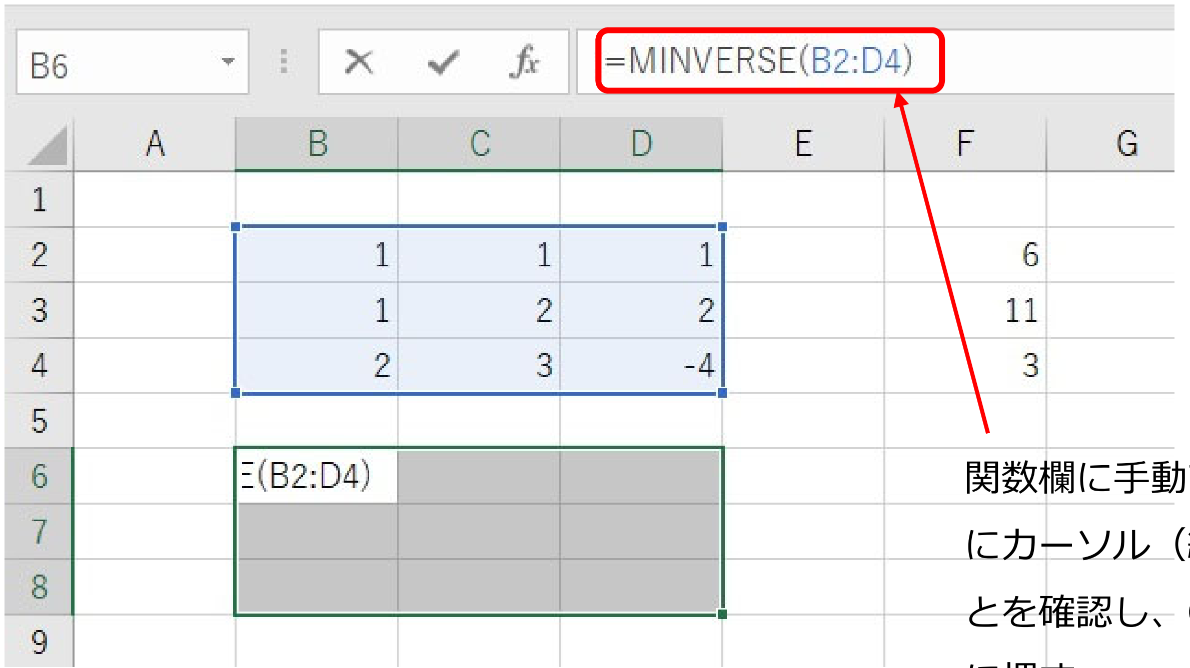
※「OK」をクリックしないこと！！



◆行列［A］の逆行列［A^{-1}］の求め方（その５）

(方法b) MINVERSE関数及び引数を手動で入力した時は、**関数欄にカーソルがある状態で、Ctrl＋Shift＋Enterを同時に押す。**

※「OK」をクリックしないこと！！



関数欄に手動で入力した時は、関数欄にカーソル（縦棒）が点滅していることを確認し、Ctrl+Shift+Enterを同時に押す。

◆行列［A］の逆行列［A^{-1}］の求め方（その６）

(共通)逆行列が出力された。

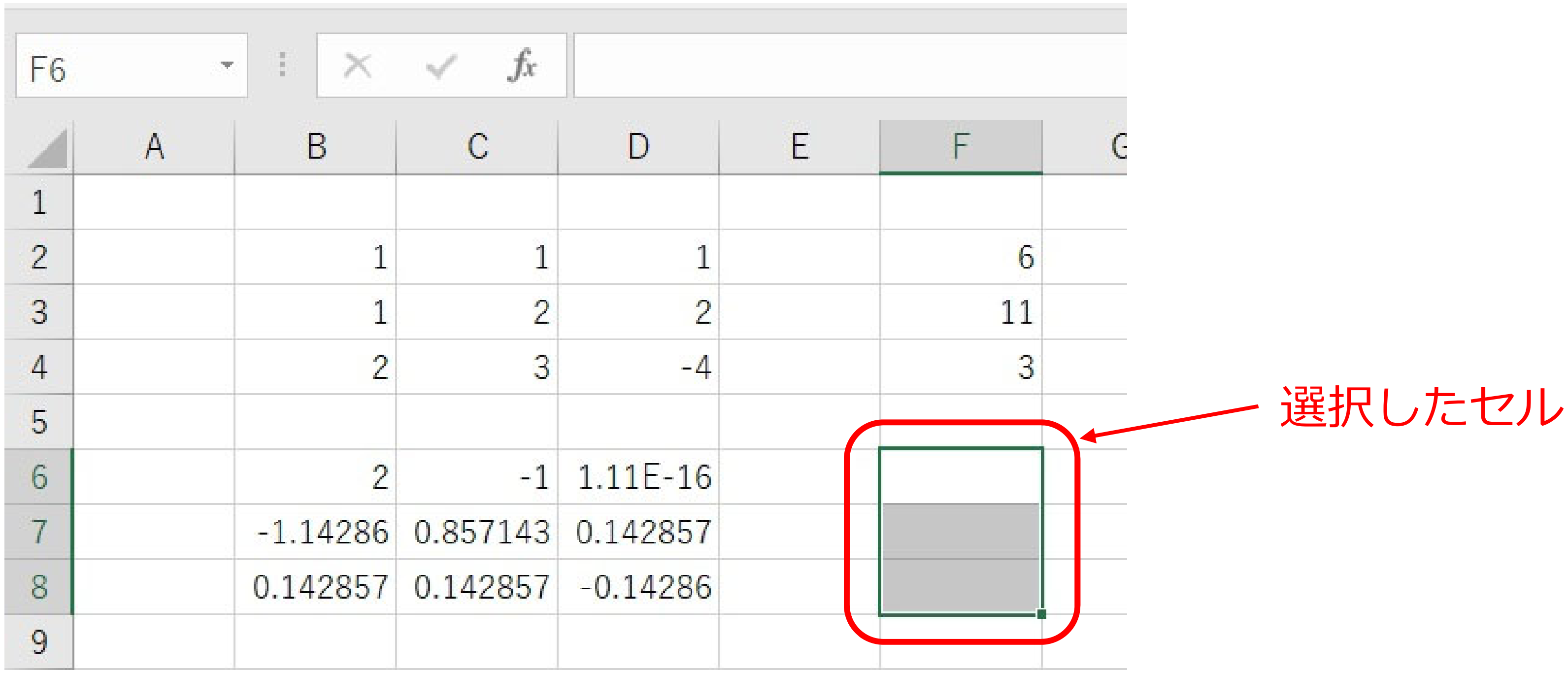
B6 | {=MINVERSE(B2:D4)}

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		1	1	1		6	
3		1	2	2		11	
4		2	3	-4		3	
5							
6		2	-1	1.11E-16			
7		-1.14286	0.857143	0.142857			
8		0.142857	0.142857	-0.14286			
9							
10							

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$ の逆行列の算出結果

◆解ベクトル(行列の積)の求め方

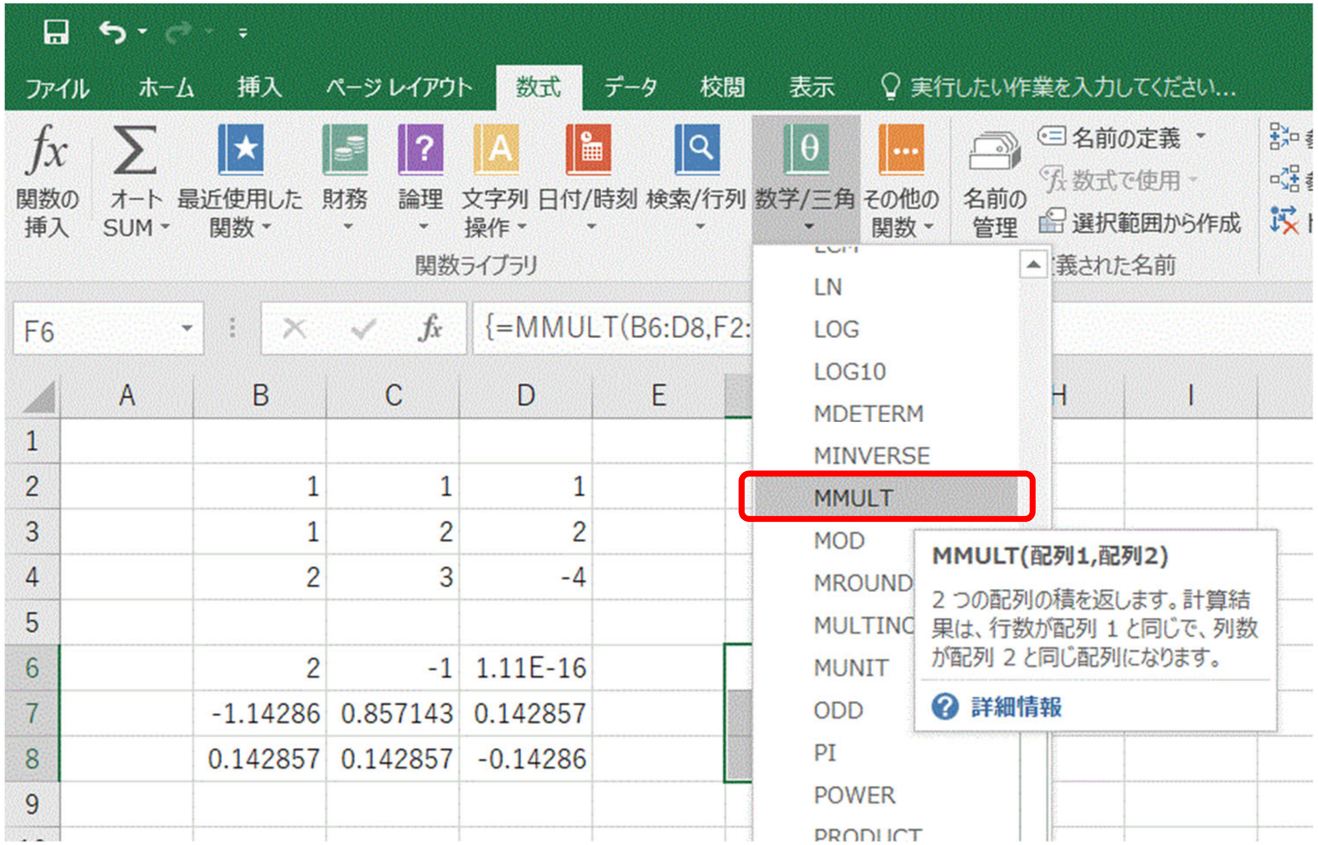
(共通)任意のセルに、定数項ベクトル（この場合は３行×１列）の大きさと同じ大きさのセルを選択する。



	A	B	C	D	E	F
1						
2		1	1	1		6
3		1	2	2		11
4		2	3	-4		3
5						
6		2	-1	1.11E-16		
7		-1.14286	0.857143	0.142857		
8		0.142857	0.142857	-0.14286		
9						

◆解ベクトルの求め方（その２）

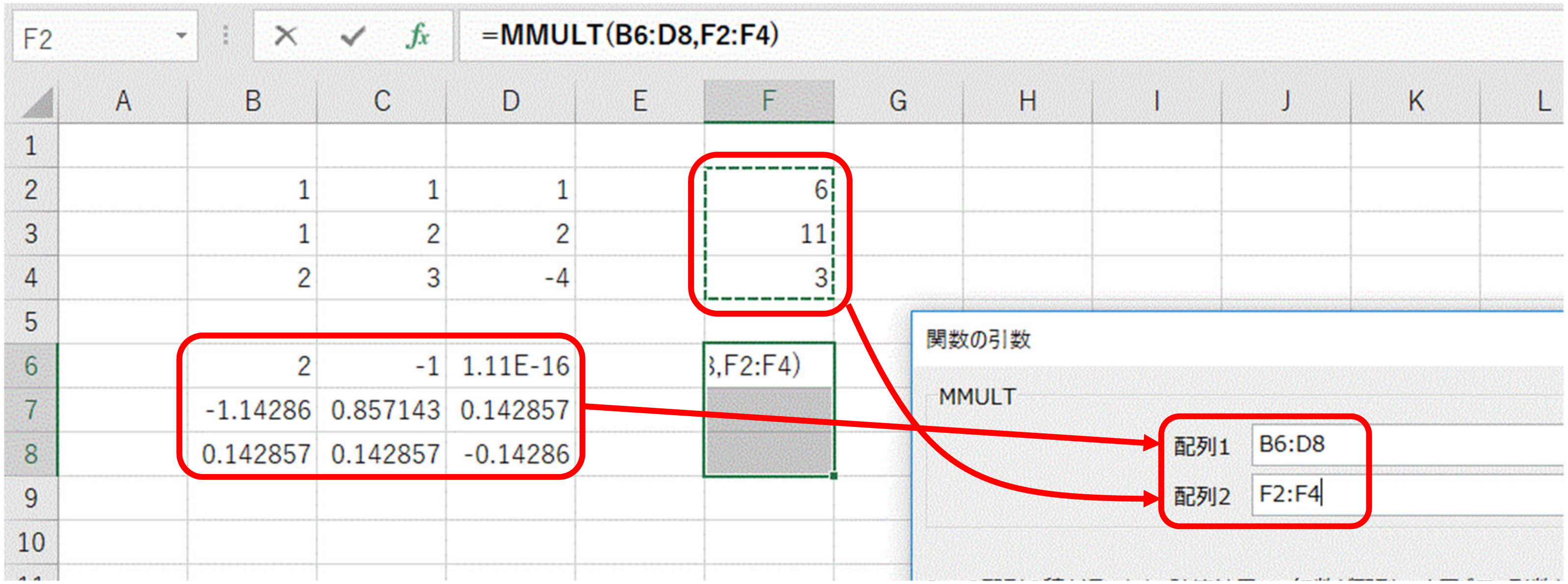
(方法a)「数式」の「数学/三角」のプルダウンメニューから関数「MMULT」を選択する。



◆解ベクトルの求め方（その３）

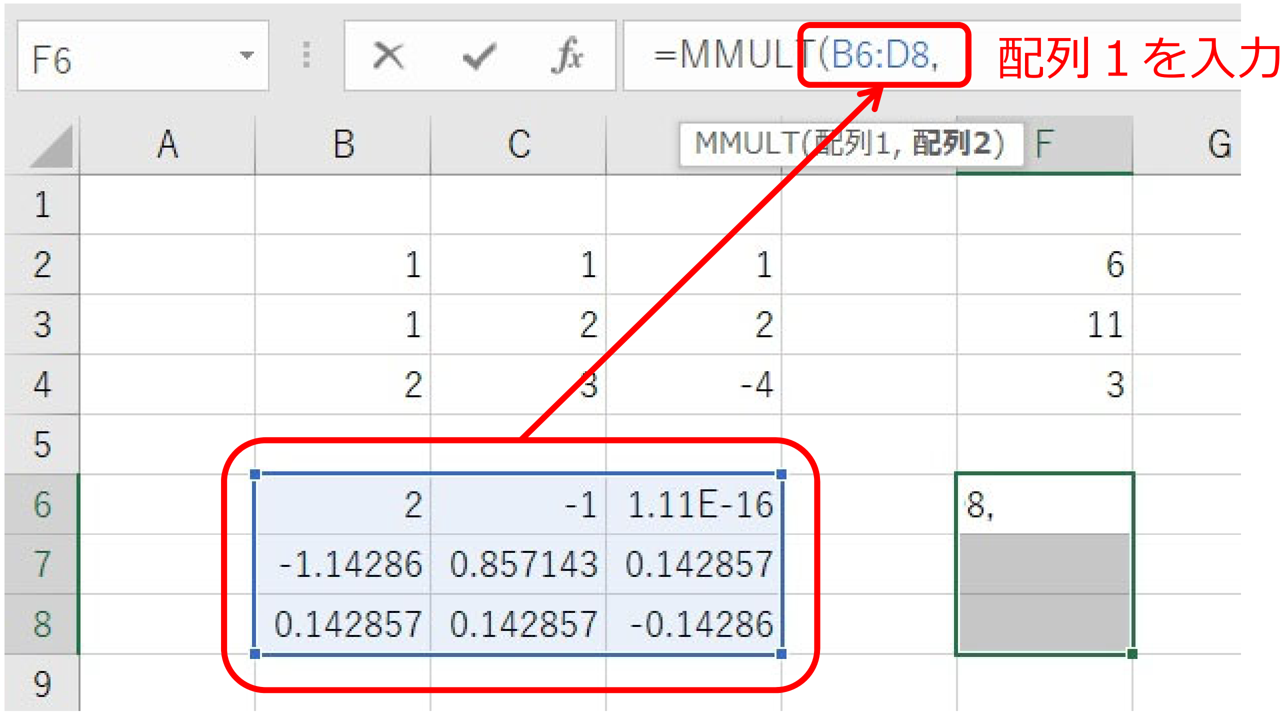
(方法a)積を算出したい行列（この場合は、配列１にB6:D8、配列２にF2:F4）を選択し、**Ctrl＋Shift＋Enterを同時に押す。**

※「OK」をクリックしないこと！！



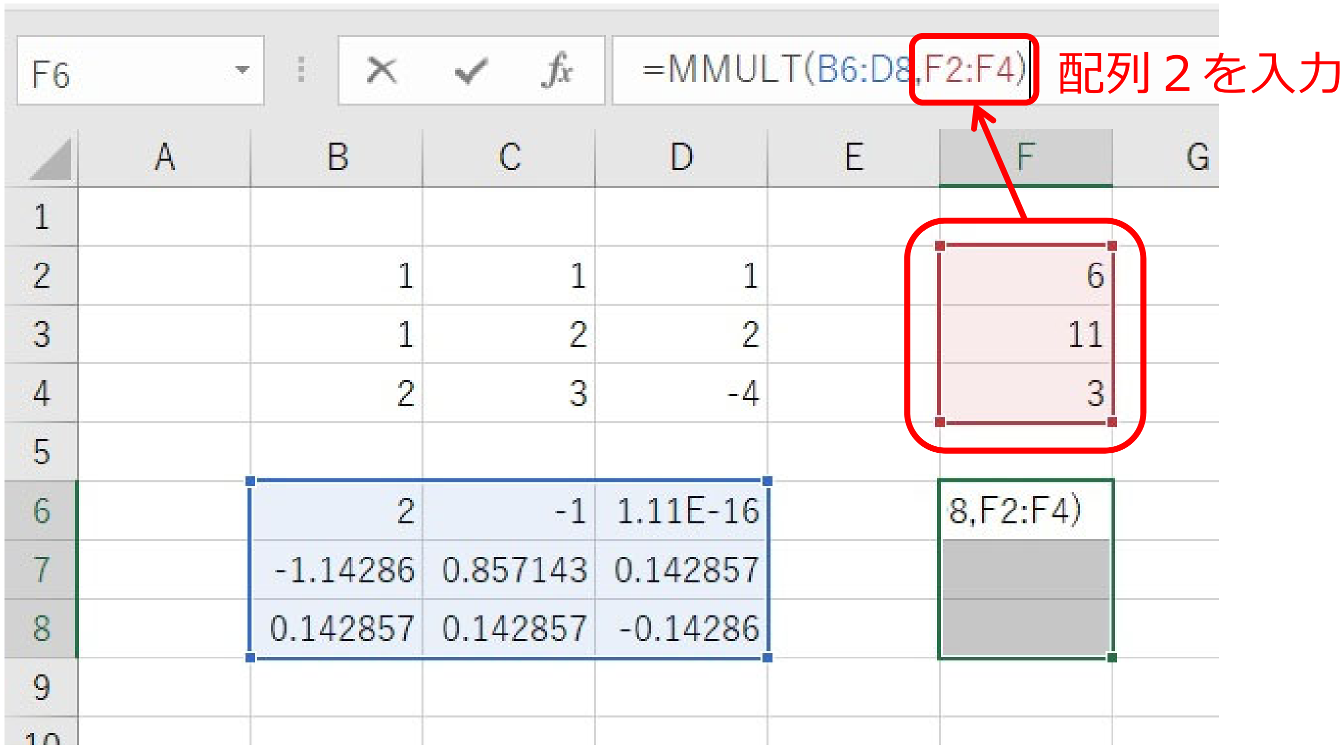
◆解ベクトルの求め方（その4）

(方法b)関数を直接入力する時は、まずMMULT関数の配列１を指定する。



◆解ベクトルの求め方（その５）

(方法b)次いでMMULT関数の配列２を指定し、
Ctrl＋Shift＋Enterのキーを同時に押す。



◆解ベクトルの求め方（その６）

(共通)解ベクトル（行列の積）が出力された。

P7

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		1	1	1		6	
3		1	2	2		11	
4		2	3	-4		3	
5							
6		2	-1	1.11E-16		1	
7		-1.14286	0.857143	0.142857		3	
8		0.142857	0.142857	-0.14286		2	
9							

求められた解ベクトル

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

総務省統計研究研修所
Statistical Research and Training Institute

◆演習問題

Excelを使って計算してみましょう。

（1）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -2 & 6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ 答え $\begin{pmatrix} 14 \\ -49 \\ -45 \end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -5 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列 答え $\begin{pmatrix} -0.96 & -0.56 & 2.33 & 2.42 \\ 0.84 & 0.44 & -1.67 & -1.98 \\ -0.02 & -0.22 & 0.33 & 0.29 \\ 0.53 & 0.33 & -1.00 & -0.93 \end{pmatrix}$

補論
計量経済学における連立方程式の利用

◆計量経済学とは

経済理論から導かれる仮説を数学モデルとして構成し、これを統計学的方法により現実にどれだけ合致するかを実証する学問領域。また、その計算結果を用いて将来の予測や経済政策の効果の分析を行うもの。

◆研究の手順

①モデルの構築（経済現象をその背後にある経済諸要素間の因果関係としてとらえ、それを確率的変動要素も考慮した数量モデルとして表現する。）

②構造方程式の推定（実経済の観測データを用いて、その数量モデルのパラメータを推定する。）

③仮説検定（推測統計学の成果を応用して、当初設定したモデルの妥当性を統計的に検証する。）

④構造方程式の確定（③の結果により適宜モデルを修正しつつ、経済理論及び統計理論上満足すべき構造方程式が得られるまで②及び③を繰り返す。）

◆経済モデル⇒　経済現象を分析するための模型

　経済モデルの枠組みは、経済主体と市場で構成されている。経済メカニズムの本質を浮き彫りにするために、複雑な設定は必要ないため、経済分析はできる限り単純なモデルで行う。

　経済モデルは、どの経済部門の取引活動を対象と扱うのかにより、「民間経済モデル」、「国民経済モデル（閉鎖経済モデル）」、「国際経済モデル（開放経済モデル）」の３つに分けられる。

<table>
<tr><th>経済部門</th><th colspan="3">経済モデル</th></tr>
<tr><td>企業（生産を行う）</td><td rowspan="2">民間経済モデル</td><td rowspan="3">国民経済モデル</td><td rowspan="4">国際経済モデル</td></tr>
<tr><td>家計（消費を行う）</td></tr>
<tr><td colspan="2">政府（民間経済の手助けをする調整役）</td></tr>
<tr><td colspan="3">海外（外国との取引状況を見る）</td></tr>
</table>

◆モデルの形態、推定方法

　変数間の構造的な関係を方程式で表しますが、方程式の数で呼び方が異なります。

①単一方程式モデル(一般に最小二乗法)

　経済のある特定部分のメカニズムをそれ以外の部分から切り離して研究する場合

例）ある特定財についての生産関数の推定や需要予測など

変数の名称：「独立変数」⇒「従属変数」「説明変数」⇒「目的変数」、
「制御変数」⇒「応答変数」etc.

②連立方程式モデル、同時方程式モデル(二段階最小二乗法や最尤法)

　特定の経済要素の動きを経済全体の相互依存の中で因果関係を研究する場合

変数の名称：「外生変数」⇒モデル外で値が決定される変数
「内生変数」⇒モデル内で値が決定される変数

◆モデルの形態と作成の考え方

①**単一方程式モデル**：１帯当たりのリンゴ消費量Qの決定に興味がある場合

・リンゴの需要（消費）関数

$$Q = \beta_1 + \beta_2 P + \beta_3 I + \beta_4 P'$$

ただし、Qはリンゴの数量（消費量）、Pはリンゴの価格、Iは可処分所得、P'はリンゴ関連財の価格

②**連立方程式モデル**：リンゴ市場におけるリンゴ価格Pの決定に興味がある場合

・リンゴの需要関数

$$Q = \beta_{11} + \beta_{12} P + \beta_{13} I + \beta_{14} P'$$

ただし、Qはリンゴの数量（消費量）、Pはリンゴの価格、Iは可処分所得、P'はリンゴ関連財の価格

・リンゴの供給関数

$$Q = \beta_{21} + \beta_{22} P + \beta_{23} W_1 + \beta_{24} W_2$$

ただし、W_1,W_2は労働賃金や材料価格など、生産関連の費用要素

◆最も簡単な均衡モデル

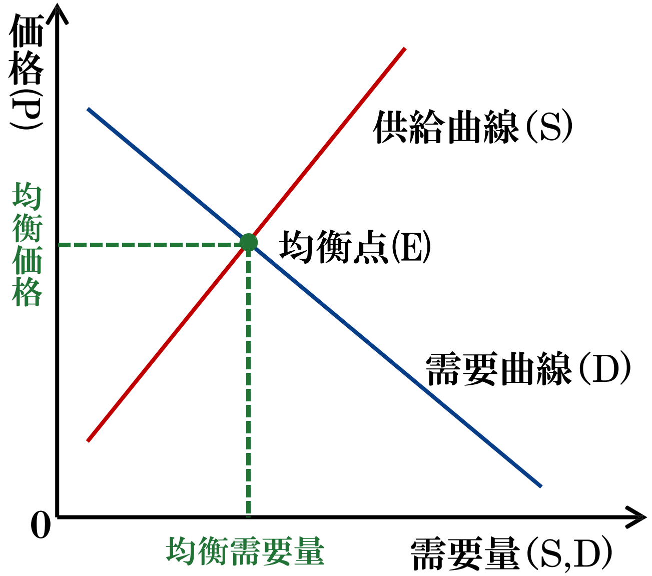
最も簡単な需要関数と供給関数から均衡価格と均衡需要量を求める。

① 均衡価格、均衡需要量は２つの関数を同時に満たすため、
グラフ上では２つの関数グラフの交点が均衡点となり、
連立方程式で解を算出できる。

② 需要関数と供給関数は次の通り。

需要関数：D= 140－ P　⇒ P ＝140 － D (a)

供給関数：S=　P － 20　⇒ P ＝　20 ＋ S(b)



③ 均衡点では、D(需要量)= S(供給量)となり、
(b)式の「S」を「D」に置き換える。

$$\begin{cases} P = 140 - D \\ P = 20 + D \end{cases}$$

④ これを解いて、P＝80、D＝60となることから、
均衡価格は80円、均衡需要量は60個となる。

総務省統計研修所 Statistical Research and Training Institute.

◆経済分析と数学的知識

代表的な経済分析とそれに関連する数学的知識を簡単にまとめると下表のようになる。

	基本的な経済分析	関連する数学的知識
マクロ的視点からの分析	①国内総生産の決定（45度線分析） ②貨幣市場と利子率の決定 ③IS－LMモデル（総需要－総供給分析） ④経済成長 など	①１次関数と直線のグラフ ②複利計算・等比数列とその和 ③連立方程式とグラフ ④指数・対数 など
ミクロ的視点からの分析	①需要供給分析 ②費用（平均費用、限界費用）関数 ③利潤最大化と供給の決定 ④不確実性・非対称情報 など	①連立方程式とグラフ ②高次方程式と曲線のグラフ ③２次関数の平方完成 ④確率、期待値 など

結びにかえて

- 本稿では、研修において学ぶ内容の事前学習資料として、基礎的な内容についてふれました。しかし、紙面の関係上、内容の詳しい解説までは行っておりません。

- 研修は、新たな知識を得るための大変有意義な場ではありますが、同時に自主学習も理解を深める上で、大切な時間です。より研修を実のあるものとするために、お近くの図書館で計量経済学や統計学の入門書を読んで受講いただくことをおすすめいたします。